同伦论I

第0章

代数拓扑概述

吴杰

北京雁栖湖应用数学研究院

拓扑的学科领域

拓扑学是数学领域的主要分支之一，包括点集拓扑、代数拓扑与几何拓扑。

点集拓扑与分析有着密切关系。对于空间几何体的拓扑研究，主要是代数拓扑与几何拓扑。

几何拓扑的主要研究对象是流形或近似于流形的几何体，这里的流形可以粗略地理解为从局部上看类似于我们的欧式空间，比方说，球面这样的几何体，其上任意点的周围小领域近似于一个（弯曲）的小圆盘；以4-维及其以下流形为主要研究对象的拓扑研究一般被称之为低维拓扑，而以5-维以上流形为主要研究对象的拓扑研究一般被称之为高维拓扑。

这种划分，主要在方法工具层面会有些差异。下面我们主要介绍代数拓扑学。

柔性与刚性

代数拓扑学粗略地讲是以代数为主要工具研究几何体，研究对象主要是多面体及其相关的空间对象或几何体，最主要的代数不变量为同伦群（包括基本群）与同调群（包括广义同调）；

其中同伦论是代数拓扑学的主体，同伦论粗略地说是研究几何体或连续映射在连续变换下的数学性质。

由于连续变换形象地看可以弹性地变换几何体的形状，所以有时人们将拓扑学形象地比喻成“橡皮泥”。相对于代数拓扑关注同伦性质（所谓“柔性性质”），几何拓扑往往更关心流形同胚意义下的性质（所谓“刚性性质”）。

柔性的研究（同伦性质）会失去很多刚性的信息，但另一方面，这种柔化又使得同伦论具有非常大的灵活性；

例如同伦论经常研究无限维的几何体以及更复杂的映射空间的同伦同调性质，并因此获得很多有关多面体同伦性质的信息。

事实上，在很多情况下无限维几何体的同伦性质反而会变得更简单些，

例如，Thom就把流形的协边分类问题转化为一个无限维几何体的同伦群计算问题，并且成功地计算出这些同伦群，从而奠定了协边理论。

拓扑K-理论也有类似的故事，借助Bott周期定理，人们能够计算出无限维李群的分类空间的所有同伦群，从而奠定了向量丛在稳定意义下分类的基石。

相对而言，向量丛在非稳定意义下的分类问题（非稳定K-理论），依然是远远不清楚的。

当然这种刚柔性质是相对的，代数拓扑与几何拓扑的联系是非常密切的，很多时候难以区分。有些理论，如流形的协边理论，本身也横跨于代数拓扑与几何拓扑之间。

代数拓扑的“三位一体”属性

代数拓扑具有如下三重属性于一体：

- **几何属性：** 传统属性，Serre获1954年菲尔茨奖，Thom获1958年菲尔茨奖等。
- **范畴属性：** Quillen获1978年菲尔茨奖，Voevodsky获2002年菲尔茨奖。
- **组合属性：** Lovász（1999年Wolf奖，2021年Abel奖）奠基了拓扑组合学（topological combinatorics）；单纯同伦论等。

历史回顾

一般认为拓扑学起始于欧拉(Euler，1707-1783)在1736年完成的关于“哥尼斯堡七桥问题”的论文[1]。下面的左图是欧拉1736年的古老论文里的插图，右图是欧拉的纪念邮票，写着对现代数学影响极其深远的“欧拉公式”[2]。



Figure: 哥尼斯堡七桥问题与欧拉数

[1] Euler, Leonhard, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.*

[2] 一个不太知名的数学家Antoine-Jean Lhuilier (1750 -1840)用了其一生的心血去研究欧拉公式。于1813年，他发表了一篇重要的论文：他发现欧拉公式并不总是正确的，答案与曲面的“亏格”有关系。正确的答案是：假设曲面的亏格是g，那么“顶点数减去边的个数加上面的个数”是等于2-2g。

催生拓扑学正式诞生的奠基性贡献者之一当推庞加莱（Jules Henri Poincaré，1854 - 1912)。庞加莱在其1895年的文章 [3]引入了基本群；

在这篇文章里，他对Betti 1871 年 [4] 关于同调数（homology numbers）的工作进行了严格化的发展，

连同黎曼1857年的重要工作 [5]以及Betti的前期工作，奠基了同调理论的起源。

---

[3]Poincaré, Henri, *Analysis situs* Journal de l'École Polytechnique (2). **1** (1895), 1-123.

[4]E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, Ann. Mat. pura appl. **2/4** (1871), 140-158.

[5]B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, edited by H. Weber, Teubner, Leipzig, 1876.

在这篇重要文章里，为纪念Enrico Betti，庞加莱把n- 维同调群的维数定义为第n个Betti数，并利用他发明的相交理论去，证明他在1893年已经申明未证明的对偶定理[6]：对于定向的m-维闭流形，Betti 数满足公式$b_i = b_{m-i}$。

不幸的是，庞加莱这篇1895年文章关于对偶定理的证明存在漏洞；Heegaard 在1898 年发现并指出了漏洞。

庞加莱意识到难以弥补其用相交理论给出证明的严重漏洞，于是，他改用剖分的方法给出了其对偶定理的正确的证明，发表里他随后的文章 [7]；

这篇1899年的文章成为可剖流形的单纯同调理论的源头，包括29年后人们所正式引入的链复形的概念的思想起源。——**历史告知：“犯错”可能是伟大发现之母。**

[6]这是代数拓扑中著名的庞加莱对偶定理的初始版本，现代版的庞加莱对偶定理是1930 年代引入cup积与cap积之后，人们重新表述的。

[7]Poincaré, Henri, *Complément àl'Analysis Situs*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **13 (2)** (1899), 285-343. doi:10.1007/BF03024461.

在庞加莱时代及其后的几十年里，现代版的代数拓扑领域一直叫组合拓扑。布尔巴基学派在1942年的会议还使用“组合拓扑”，1944年将学科领域改名为代数拓扑[8]。

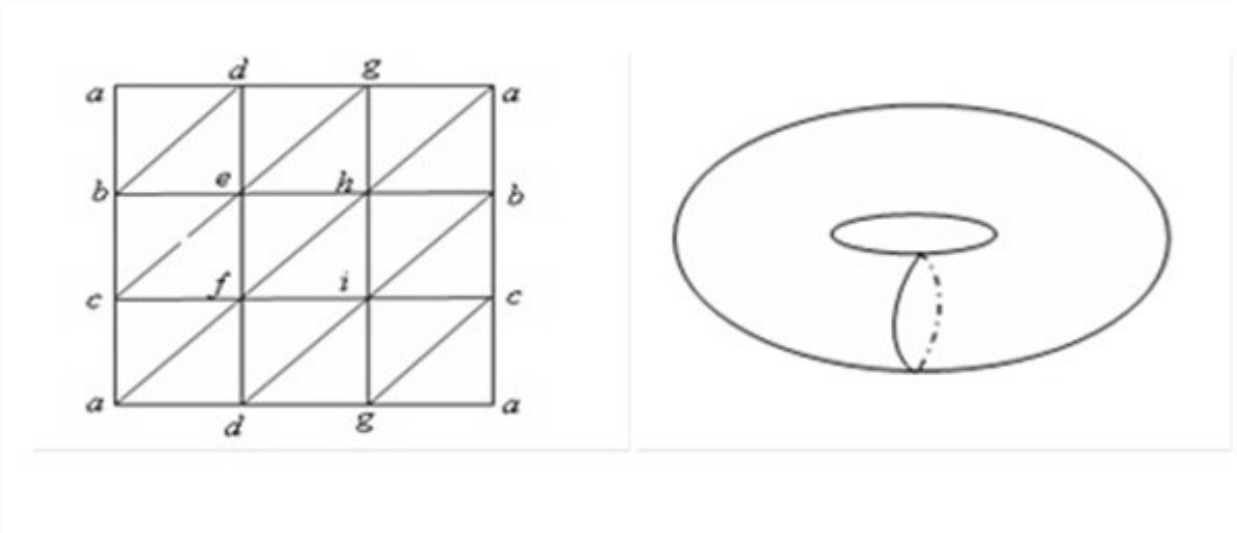


Figure: 环面的三角剖分

[8] John McCleary, *Bourbaki and Algebraic Topology*.[第8页]

单纯复形

几何单纯复形K：由一族几何单形构成的集合，其内每两个单形相交于**公共面**或**空集**。

多面体$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$，$K$中的单形的并；取**弱拓扑**，即$U \subseteq |K|$为开集当且仅当$U$与$K$每一单形$\sigma$的交为$\sigma$的开子集。

抽象单纯复形$\mathcal{K}$：一个集合（**顶点集**）的一族有限非空子集，满足$\sigma \in \mathcal{K} \Longrightarrow \sigma$的非空子集也属于$\mathcal{K}$。（**简言之**，“面运算封闭”。）

超图：一个集合（**顶点集**）的一族有限非空子集（**超边**）。（去掉“面运算封闭”的条件限制。）

单纯复形有什么用？

- **剖分几何体：** X是一个可剖空间指的是X**同胚于**某个多面体$|K|$。
- **单纯同调群：**获得拓扑不变量。
- **可以从抽象数据中获得几何体：** 几何单纯复形$\longleftrightarrow$ 抽象单纯复形。通过构造抽象单纯复形，获得（高维）几何体。

Δ-复形

Δ-复形概念是**定向单纯复形**的一个推广（**参考文献：** 普遍使用的教科书，Hatcher的书《Algebraic Topology》。）：

- 设Δ^n为**标准n-维单形**，即$\mathbb{R}^{n+1}$中的标准基$e_0 = (1, 0, \ldots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ 的端点所张成的n-维单形。
- 一个Δ-复形是一个空间X以及一族连续映射$\sigma_\alpha \colon \Delta^n \to X$构成的集合$\mathcal{C}$，满足: 1) σ_α限制于Δ^n的内部是单的；2）σ_α限制于其每个面上仍属于$\mathcal{C}$；3）X取**弱拓扑**。

注： 严格地说，σ_α限制于其面τ上，指的是，$\sigma_\alpha|_\tau$与标准$(n-1)$-单形Δ^{n-1}到τ的保序单纯映射的合成。

Δ-集与双超图（super hypergraph）

Δ-集是Δ-复形的**抽象化**：

- 一个Δ-集是一个分次集合$X = \{X_n\}_{n\geq 0}$以及面运算$d_i \colon X_n \to X_{n-1}$, $0 \leq i \leq n$, 满足$d_i d_j = d_j d_{i+1}$ （$i \geq j$）。

双超图（super hypergraph）[9] 是指一个配对$(\mathcal{H}, X)$，其中X 是一个Δ- 集，$\mathcal{H}$是X的一个**分次子集**。我们称X 为$\mathcal{H}$ 的**母Δ-集**(parental Δ-set)。————与丘成桐先生引入的**道路复形**（path complex）关系非常密切，从Δ-集的角度将path complex的想法进行推广。

[9] Jelena Grbić, Jie Wu, Kelin Xia and Guo-Wei Wei, *Aspects of topological approaches for data science*, Foundations of Data Science, doi: 10.3934/fods.2022002, 2022

Δ-集与Δ-复形

Δ-集$\longleftrightarrow$ Δ-复形。

Δ-复形$\longrightarrow$ Δ-集，其胞腔具有Δ-结构。

Δ-集$\longrightarrow$ Δ-复形，通过Δ-集X的几何实现：

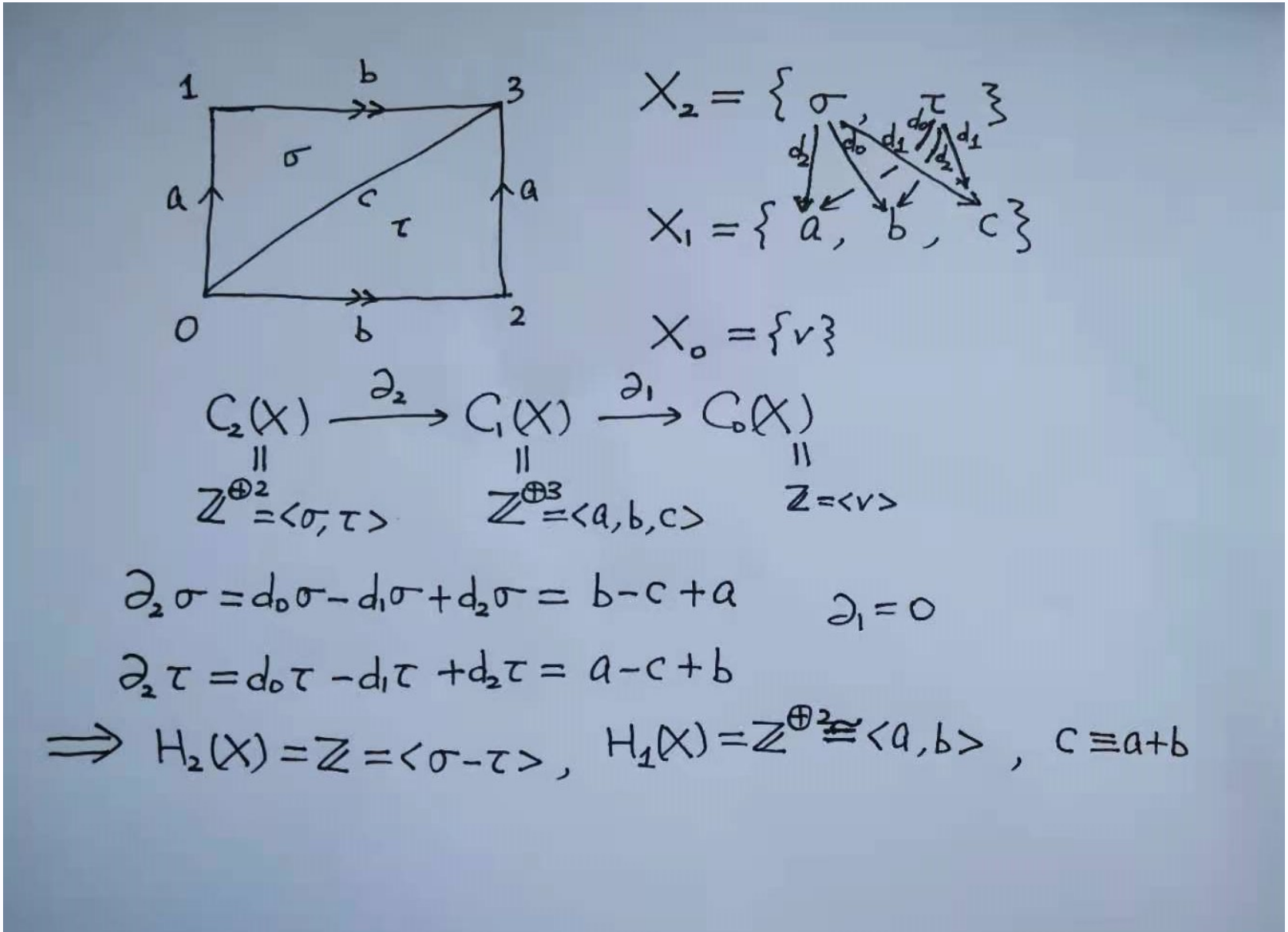
$$|X| = \left(\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n \right) / \sim, \quad (d_i\sigma, y) \sim (\sigma, d^i y),$$

这里$d^i\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, $0 \leq i \leq n$, 是（保序）顶点映射$(e_0, \ldots, e_{n-1}) \mapsto (e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n)$ 诱导的单纯嵌入。

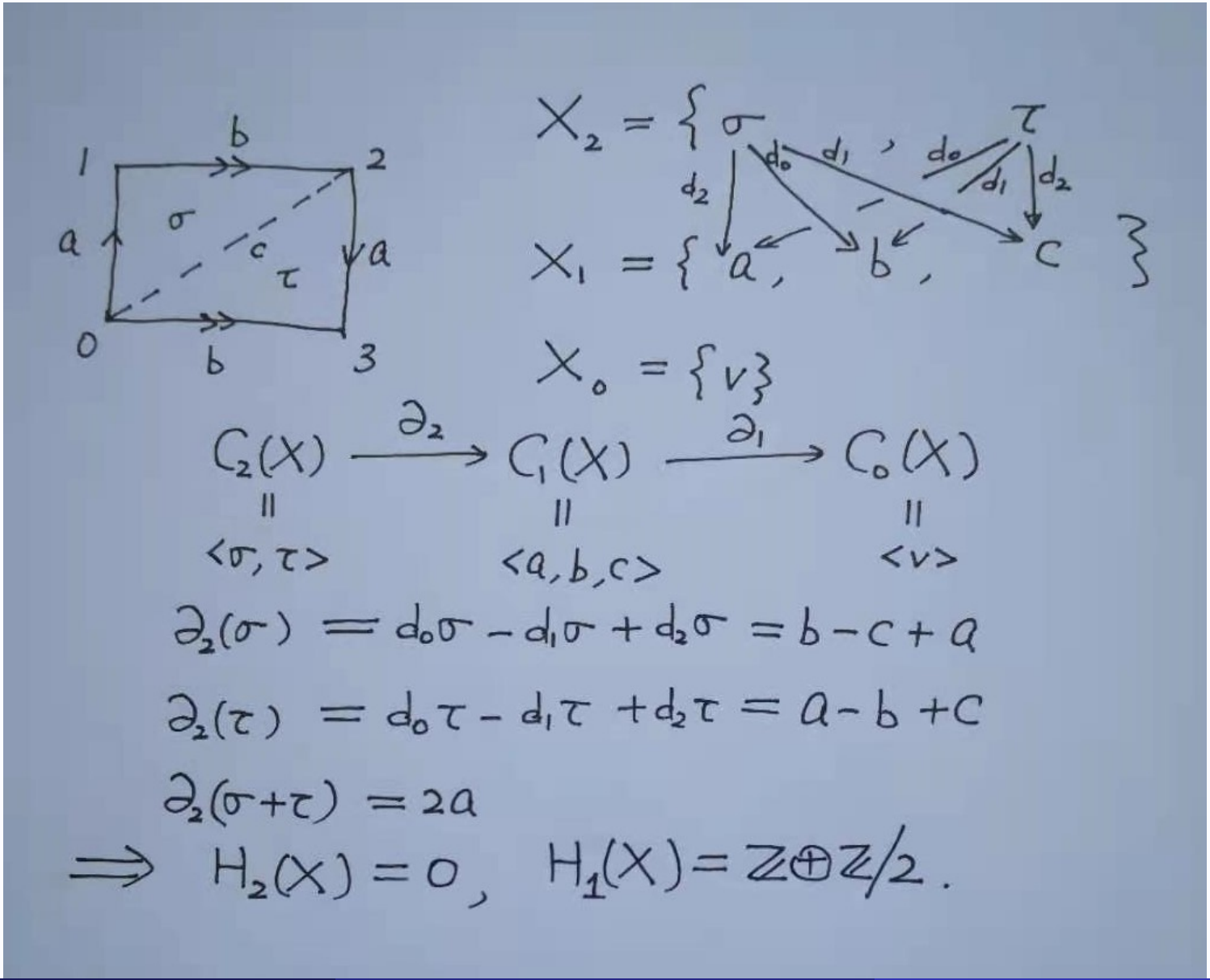
Δ-集与双超图有何用？

- 推广了单纯复形与超图的概念；同时保持组合结构。
- 允许多个单形**共享**相同的顶点。
- 单纯同调理论仍然有效。
- 适用于刻画一族有限子图。

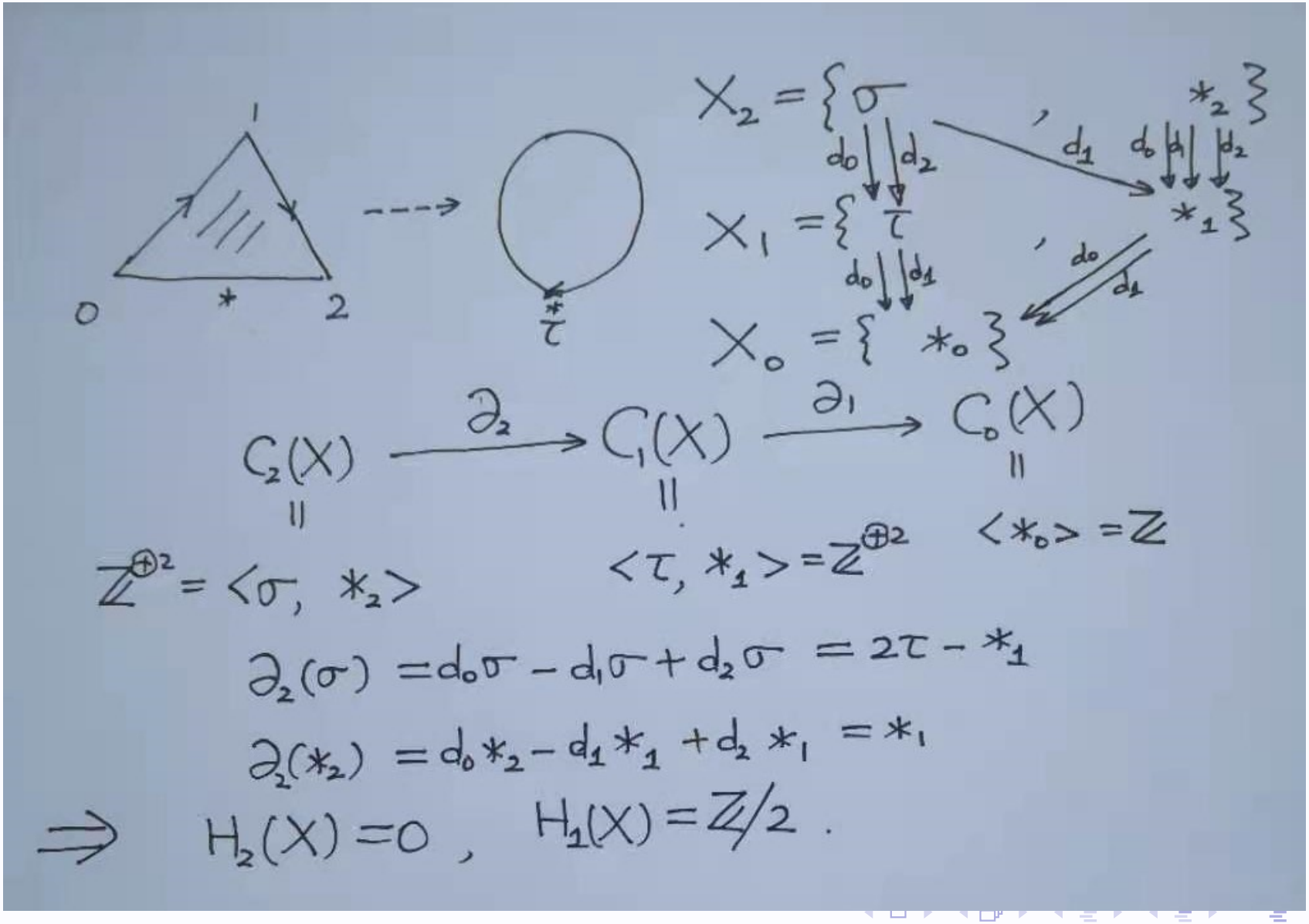
环面的Δ-结构


1
b
3
σ
a
c
a
τ
0
b
2
$X_2 = \{\sigma, \tau\}$
d_2 d_0 d_1 d_0 d_1 d_2
$X_1 = \{a, b, c\}$
$X_0 = \{v\}$
$C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$
$\mathbb{Z}^{\oplus 2} = \langle \sigma, \tau \rangle$
$\mathbb{Z}^{\oplus 3} = \langle a, b, c \rangle$
$\mathbb{Z} = \langle v \rangle$
$\partial_2 \sigma = d_0\sigma - d_1\sigma + d_2\sigma = b - c + a$
$\partial_1 = 0$
$\partial_2 \tau = d_0\tau - d_1\tau + d_2\tau = a - c + b$
$\Longrightarrow H_2(X) = \mathbb{Z} = \langle \sigma - \tau \rangle$, $H_1(X) = \mathbb{Z}^{\oplus 2} \cong \langle a, b \rangle$, $c \equiv a + b$

Klein瓶的Δ-结构


1
b
2
a
σ
c
τ
a
0
b
3
$X_2 = \{\sigma, \tau$
d_0 d_1 d_0 d_1 d_2 d_2
$X_1 = \{a, b, c\}$
$X_0 = \{v\}$
$C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$
$\langle\sigma, \tau\rangle$
$\langle a, b, c\rangle$
$\langle v\rangle$
$\partial_2(\sigma) = d_0\sigma - d_1\sigma + d_2\sigma = b - c + a$
$\partial_2(\tau) = d_0\tau - d_1\tau + d_2\tau = a - b + c$
$\partial_2(\sigma+\tau) = 2a$
$\Rightarrow H_2(X) = 0, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2.$

射影平面的Δ-结构


0
1
2
*
τ
$X_2 = \{\sigma$
$X_1 = \{\tau$
$X_0 = \{*_0\}$
d_0 d_1 d_2
$*_2$ $*_1$
$C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$
$\mathbb{Z}^{\oplus 2} = \langle \sigma, *_2 \rangle$
$\langle \tau, *_1 \rangle = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$
$\langle *_0 \rangle = \mathbb{Z}$
$\partial_2(\sigma) = d_0\sigma - d_1\sigma + d_2\sigma = 2\tau - *_1$
$\partial_2(*_2) = d_0 *_2 - d_1 *_1 + d_2 *_1 = *_1$
$\Rightarrow H_2(X) = 0, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}/2.$

胞腔复形—JHC Whitehead 1949年引入

下面来自Hatcher书第5页：

A natural generalization of this is to construct a space by the following procedure:

(1) Start with a discrete set X^0, whose points are regarded as 0-cells.

(2) Inductively, form the **n-skeleton** X^n from X^{n-1} by attaching n-cells e^n_α via maps $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. This means that X^n is the quotient space of the disjoint union $X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha$ of X^{n-1} with a collection of n-disks D^n_α under the identifications $x \sim \varphi_\alpha(x)$ for $x \in \partial D^n_\alpha$. Thus as a set, $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e^n_\alpha$ where each e^n_α is an open n-disk.

(3) One can either stop this inductive process at a finite stage, setting $X = X^n$ for some $n < \infty$, or one can continue indefinitely, setting $X = \bigcup_n X^n$. In the latter case X is given the weak topology: A set $A \subset X$ is open (or closed) iff $A \cap X^n$ is open (or closed) in X^n for each n.

A space X constructed in this way is called a **cell complex** or **CW complex**. The

C=closure finiteness, W=weak topology

Figure: CW复形

Whitehead定理—在他引入胞腔复形的文章中给出

下面来自Whitehead的原文[10]：

THEOREM 1. *The map $f: X \to Y$ is a homotopy equivalence if, and only if, $f_n: \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ is an isomorphism onto for every n such that $1 \leqq n < N+1$.*

THEOREM 2. *The map $f: X \to Y$ is an $(N-1)$-homotopy equivalence if, and only if, f_n is an isomorphism onto for every n such that $1 \leqq n < N$.*

N=max{dim X, dim Y}

THEOREM 3. *The map $f: X \to Y$ is a homotopy equivalence if, and only if, each of the induced homomorphisms $f_1: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ and $H_n(\tilde{X}) \to H_n(\tilde{Y})$ is an isomorphism onto.*

Figure: Whitehead定理

[10] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213-245.

环面的胞腔结构

- 第一步，只看正方形的边界。在粘接运算下，四个顶点粘成了一点；两组对边分别同向粘接后，变成两个圆圈，相交于一个点（由四个顶点粘一起的点）；即两个圆圈S^1 的一点并，$S^1 \vee S^1$。
- 第二步，再把正方形的内部放回去，把环面T^2写成胞腔形式，则有$T^2 = (S^1 \vee S^1) \cup_f D^2$, 这里$D^2$一个圆盘，$f$是从$D^2$的边界$\partial D^2 = S^1$ 到$S^1 \vee S^1$的映射（后面的图示），$(S^1 \vee S^1) \cup_f D^2$是将任意$x \in S^1 = \partial D^2$ 粘接到$f(x) \in S^1 \vee S^1$。

从胞腔去理解，环面T^2有一个0-维胞腔（正方形四个顶点粘一起得到的），两个1-维胞腔，以及一个2-维胞腔；人们一般不计0-维胞腔（一个点），所以称T^2是3-胞腔复形。类似地，射影平面是2-胞腔复形，Klein 瓶是3-胞腔复形。

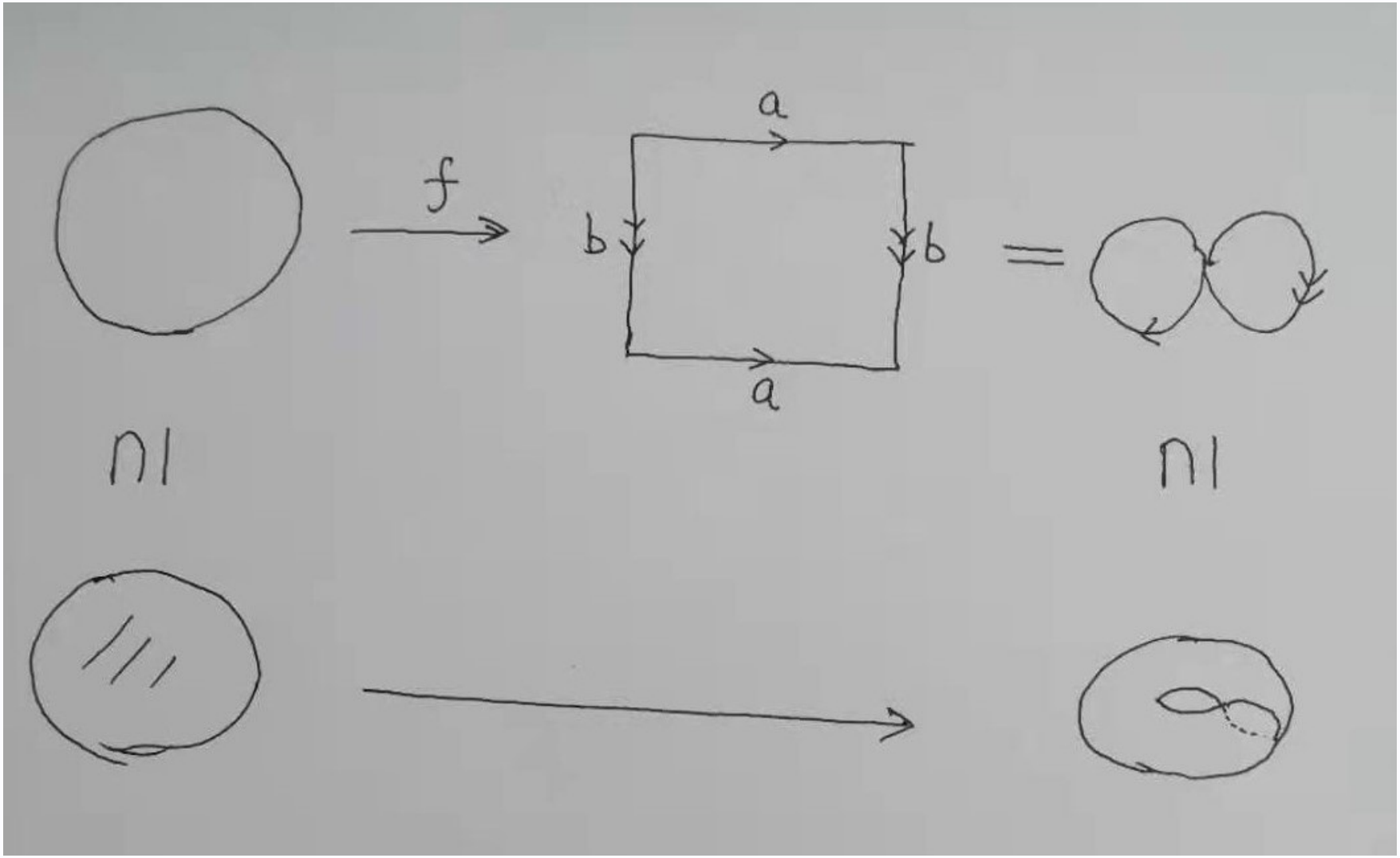


Figure: 环面的胞腔结构

射影空间$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$的胞腔结构

记$q\colon S^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$为商映射。

- 第一步，取S^3的半个3-维球$S^3_+ = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid w \geq 0\}$。商映射$q$限制于3-维半球$q|\colon S^3_+ \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$是一个满映射，我们可以将$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$视为半球$S^3_+$ 的商空间。这里q限制于S^3_+的内部已经是$1-1$ 的，等价关系只有在S^3_+的边界（$w=0$）处发生。
- 第二步，对S^3_+进行坐标降维。映射

$$p\colon S^3_+ \longrightarrow D^3, \quad (x,y,z,w) \mapsto (x,y,z)$$

是一个同胚映射。注意边界$\partial S^3_+ = \partial D^3 = S^2$以及其在$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$中的像$q(\partial S^3_+) = \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^3$是2- 维的射影平面，所以

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^3 = q(\partial S^3_+) \cup_{q|_{\partial S^3_+}} S^3_+ = \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cup_{q|_{\partial S^3_+}} S^3_+ \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cup_{q|_{\partial D^3}} D^3.$$

- 第三步，对$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$做同样的操作，得到$\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cup_{q|_{\partial D^2}} D^2$; 再对$\mathbb{R}\mathrm{P}^1$做同样操作，得$\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = \mathbb{R}\mathrm{P}^0 \cup_{q|_{\partial D^1}} D^1$。最后，我们得到$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 的胞腔结构：

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^3 = \mathbb{R}\mathrm{P}^0 \cup D^1 \cup D^2 \cup D^3,$$

是一个3-胞腔复形。

在这个例子，我们不需要经过“可视化”，通过数学性质，直接给出$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$的胞腔结构。这一方法可以轻松地推广到高维，得到一般的n-维射影空间$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$的胞腔结构：

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{R}\mathrm{P}^0 \cup D^1 \cup D^2 \cup \cdots \cup D^n$$

是一个n-胞腔复形。

同调可以提供（单连通复形）胞腔结构的一些信息

下面来自Hatcher书第429页：

Proposition 4C.1. *Given a simply-connected CW complex X and a decomposition of each of its homology groups $H_n(X)$ as a direct sum of cyclic groups with specified generators, then there is a CW complex Z and a cellular homotopy equivalence $f: Z \to X$ such that each cell of Z is either:*

(a) *a 'generator' n-cell e^n_α, which is a cycle in cellular homology mapped by f to a cellular cycle representing the specified generator α of one of the cyclic summands of $H_n(X)$; or*

(b) *a 'relator' $(n+1)$-cell e^{n+1}_α, with cellular boundary equal to a multiple of the generator n-cell e^n_α, in the case that α has finite order.*

In the nonsimply-connected case this result can easily be false, counterexamples

Figure: 极小胞腔结构

映射锥

胞腔复形思想的一个推广是“映射锥”的概念。对于一个的空间X，它的锥C^uX定义为$C^uX = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$, 即把柱体的顶部空间$X \times \{1\}$粘成一点[11]。对于连续映射$f\colon X \to Y$，其映射锥$C^u_f$是锥$C^uX$的底部空间$X$通过映射$f$ 粘到Y，即$C^u_f = C^uX \sqcup Y/\sim$, 这里$(x,0) \sim f(x) \in Y$，对$x \in X$。注意$n$-维球体同胚于其边界$S^{n-1}$的锥，所以映射锥可视为粘接胞腔的推广。通过多次映射锥的构造，胞腔复形的概念可以推广到更一般的**胞腔化空间(cellular space)**。

[11]严格地说，这是非约化锥（unreduced cone）。同伦论更多的是考虑带有基点的空间，对于带基点x_0的空间X，它的约化锥CX 是把柱体$X \times [0,1]$的顶部空间$X \times \{1\}$连同基点产生的线段$\{x_0\} \times [0,1]$粘成一点所得到。对于带基点的假定在同伦论里是技术性需要，例如基本群与同论群的乘法运算需要假定一个基点。

(广义) 同调理论

下面来自Switzer书第7章[12]:

7.1. Definition. Let $\mathcal{T}^2$ denote the category of all topological pairs (X, A) ($A \subset X$ a subspace) and maps $f:(X, A) \to (Y, B)$. On $\mathcal{T}^2$ we have the functor $R:\mathcal{T}^2 \to \mathcal{T}^2$ ("restriction") defined by $R(X, A) = (A, \varnothing)$, $R(f) = f|A$. Let $\mathcal{T}^{2'}$ be the homotopy category—i.e. objects are as in $\mathcal{T}^2$, morphisms are homotopy classes of maps. We still have $R:\mathcal{T}^{2'} \to \mathcal{T}^{2'}: R(X, A) = (A, \varnothing)$, $R[f] = [f|A]$.

[12] R. Switzer, Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1975.

An *unreduced homology theory* h_* on $\mathscr{T}^{2'}$ is a sequence of functors $h_n: \mathscr{T}^{2'} \to \mathscr{A}$ for each $n \in \mathbb{Z}$ and natural transformations $\partial_n: h_n \to h_{n-1} \circ R$, $n \in \mathbb{Z}$, satisfying the following two axioms:

i) Exactness: for every pair $(X, A) \in \mathscr{T}^{2'}$ the sequence

$$\cdots \longrightarrow h_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} h_n(A, \varnothing) \xrightarrow{h_n[i]} h_n(X, \varnothing) \xrightarrow{h_n[j]} h_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \cdots$$

is exact, where $i: (A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$ and $j: (X, \varnothing) \to (X, A)$ are the inclusions;

ii) Excision: for every pair $(X, A) \in \mathcal{T}^{2'}$ and subset $U \subset A$ with $\bar{U} \subset \mathring{A}$ the inclusion $j:(X-U, A-U) \to (X, A)$ induces an isomorphism $h_n[j]: h_n(X-U, A-U) \to h_n(X, A)$, all $n \in \mathbb{Z}$.

Hereafter we shall abbreviate $h_n[f]$ by f_* and $\partial_n(X, A)$ by ∂.

Remark. Eilenberg–Steenrod Axioms 1 and 2 say h_n is a functor on $\mathcal{T}^2$, Axiom 3 says ∂_n is a natural transformation, Axiom 5 says h_n is actually a functor on $\mathcal{T}^{2'}$, not just on $\mathcal{T}^2$; Axiom 4 is Exactness and Axiom 6 is Excision.

映射锥与广义同调

7.29. On $\mathscr{PT}'$ we have the suspension functor S defined by $S(X, x_0) = (SX, *)$ and $S[f] = [Sf] = [1_{S^1} \wedge f]$. A *reduced homology theory* k_* on $\mathscr{PT}'$ is a collection of functors $k_n : \mathscr{PT}' \to \mathscr{A}$ and natural equivalences $\sigma_n : h_n \to h_{n+1} \circ S$, $n \in \mathbb{Z}$, satisfying

Exactness: for every pointed pair (X, A, x_0) with inclusions $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ and $j : (X, x_0) \to (X \cup CA, *)$ the sequence

$$k_n(A, x_0) \xrightarrow{k_n[i]} k_n(X, x_0) \xrightarrow{k_n[j]} k_n(X \cup CA, *)$$

is exact.

映射的同伦与映射锥的伦型

对于胞腔复形的伦型问题，粘接映射的同伦行为会决定添加胞腔后的复形的伦型。我们从映射锥角度来看一下这个问题。假设$F\colon X\times[0,1]\longrightarrow Y$是连接两个映射

$$f(x)=F(x,0),g(x)=F(x,1)\colon X\to Y$$

的同伦，我们会得到下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
X=X\times\{1\} & \xrightarrow{g} & Y & \hookrightarrow & C_g \\
\downarrow\simeq & & \downarrow= & & \downarrow \\
X\times[0,1] & \xrightarrow{F} & Y & \longrightarrow & C_F \\
\simeq\uparrow & & =\uparrow & & \uparrow \\
X=X\times\{0\} & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & C_f.
\end{array}$$

上图的每一行诱导出同调群的长正合列，由5-项引理可知，图中右边列的两个映射分别诱导出同调群的同构。假设X与Y为单连通的CW-复形。图中右边的映射锥C_f,C_g,C_F均为单连通同时均具有CW-复形的伦型，由Whitehead定理可知图中右边列的两个映射均为同伦等价[1]。换言

映射同伦与映射锥伦型关系的文献

Hilton, Peter, *On the homotopy type of compact polyhedra*, Fund. Math. **61** (1967), 105-109.

Hilton, Peter, *Some remarks concerning the semiring of polyhedra*, Bull. Soc. Math. Belg. **19** (1967), 277-288.

Hilton, Peter, *Note on the homotopy type of mapping cones*, Comm. Pure Appl. Math., **21** (1968), 515-519.

同伦群的数学意义——building blocks for complexes up to homotopy

粘接映射的同伦类决定映射锥的伦型。

对于胞腔复形，每粘接一个n-维胞腔，上图的空间X 是一个$(n-1)$-维球面S^{n-1}, 从S^{n-1}到Y的(保基点的）同伦类正是同论群$\pi_{n-1}(Y)$。

也就是说，同论群是制造胞腔复形在伦型意义下的机器，这也正是同论群是代数拓扑核心问题的重要原因之一。

伦型问题——多面体同伦意义的分类

对于道路连通的有限胞腔复形的分类问题（或伦型问题），因为我们不计0-维胞腔，1-胞腔复形就是一个球面，伦型的分类非常清晰，球面的维数就是刻画1-胞腔复形同伦分类的完全不变量。

下一步应该是2-胞腔复形K，根据构造，K是某个连续映射$f\colon S^m \to S^n$的映射锥。

当$m < n$时，已知同论群$\pi_m(S^n) = 0$，即f同伦于常值映射，从而K同伦等价于$S^n \vee S^{m+1}$。

当$m=n$ 时，已知$\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$，即$f\colon S^n\to S^n$的同伦类由其映射度$\deg(f)$完全决定；

同伦论方法容易证明，$C_f\simeq C_g$当且仅当$\deg(f)=\pm\deg(g)$；

这种情况的分类也非常清晰，即K 的伦型是$S^n\vee S^{n+1}$或n-维同调群是循环群$\mathbb{Z}/k$的Moore 空间$M(\mathbb{Z}/k,n)$，K的n-维同调群$\mathbb{Z}/k$就决定了K的伦型。

当$m > n$ 时，利用同调长正合列，可以得知K的同调群如下：

$$H_j(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{当} \quad j = 0, n, m+1 \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

此时，除非$\pi_m(S^n) = 0$，K的同调群已经不能决定K的伦型，需要球面同论群$\pi_m(S^n)$的信息。

球面同伦群 $\leftrightsquigarrow$ **2-胞腔复形的同伦分类**

Serre定理

Serre在1951年的文章[13]得到下面的著名结果[14]

$$\pi_m(S^n) = \begin{cases} \text{有限交换群} & n\text{是奇数或者}n\text{是偶数且}m \neq 2n-1, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{有限交换群} & n\text{是偶数并且}m = 2n-1。 \end{cases}$$

[13] J-P. Serre, *Homologie singuliére des espaces fibrés. III. Applications homotopiques*, (French) C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 142 - 144.

[14] Serre因为这项工作获得1954年的菲尔茨奖。

Serre定理告诉我们，给定两个正整数$m > n$，除了n是偶数并且$m = 2n - 1$的情况，在伦型意义下，只有有限个由一个n-维胞腔与一个$(m + 1)$-维胞腔组成的2-胞腔复形；

同时告诉我们，在伦型意义下，有可数无限个由一个偶维n-胞腔以及一个$2n$-维胞腔组成的2-胞腔复形。

同伦群非零性问题

另外一个问题是：给定正整数$m > n$，在伦型意义下，是否存在一个**非平凡**的由一个n-维胞腔与一个$(m+1)$-维胞腔组成的2-胞腔复形K？

这里的非平凡指K不是同伦等价于$S^n \vee S^{m+1}$，或者说K在伦型下是不可分解的。转化为同论群问题是说，$\pi_m(S^n)$**是不是非零**。

当$n = 1$时，对于所有$m > 1$,已知$\pi_m(S^1) = 0$，从而任何一个由一个1-维胞腔与一个$(m+1)$-维胞腔（$m > 1$）组成的2-胞腔复形都同伦等价于$S^1 \vee S^{m+1}$。

球面同伦群

Table of the homotopy groups $\pi_{n+k}(S^n)$

From Toda's book: Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres

In the following table,

- an integer n indicates a cyclic group $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ of order n,
- "infty" indicates the infinite cyclic group $\mathbf{Z}$,
- the symbol "+" indicates the direct sum of the (abelian) groups,
- n^k indicates the direct sum of k-copies of $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

$\pi_{n+k}(S^n)$

k\n	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13
k=1	infty	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
k=2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
k=3	2	4+3	infty+4+3	8+3	8+3	8+3	8+3	8+3	8+3	8+3	8+3	8+3
k=4	4+3	2	2^2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
k=5	2	2	2^2	2	infty	0	0	0	0	0	0	0
k=6	2	3	8+3+3	2	2	2	2	2	2	2	2	2
k=7	3	3+5	3+5	2+3+5	4+3+5	8+3+5	infty+8+3+5	16+3+5	16+3+5	16+3+5	16+3+5	16+3+5
k=8	3+5	2	2	2	8+2+3	2^3	2^4	2^3	2^2	2^2	2^2	2^2
k=9	2	2^2	2^3	2^3	2^3	2^4	2^5	2^4	infty+2^3	2^3	2^3	2^3
k=10	2^2	4+2+3	8+4+2+3^2+5	8+2+9	8+2+9	8+3+2	8^2+2+3^2	8+2+3	4+2+3	2^2+3	2+3	2+3
k=11	4+2+3	4+2^2+3+7	4+2^5+3+7	8+2^2+9+7	8+4+9+7	8+2+9+7	8+2+9+7	8+2+9+7	8+9+7	8+9+7	infty+8+9+7	8+9+7

从已知的同论群计算结果可知，当$n \geq 6$ 时，多数同伦群$\pi_m(S^n)$非零，但$\pi_{n+4}(S^n) = 0$，意味着，不能确定是否存在底维胞腔维数为n的非平凡的2-胞腔复形，即有时存在有时不存在，与顶维胞腔的维数$m+1$有关。

$\pi_{n+4}(S^n) = 0$（$n \geq 6$）是说，如果Y是胞腔维数分别是$n, n+5$（$n \geq 6$）的2-胞腔复形，则Y同伦等价于$S^n \vee S^{n+5}$。

Curtis在他1969年的文章 [15]证明了：

对于所有的$m \geq 4$，$\pi_m(S^4) \neq 0$。

意味着，给定任意一个$m \geq 4$，总是存在一个非平凡的底维胞腔是4-维顶维胞腔是$m+1$-维的2-胞腔复形。

[15]E. Curtis, *Some nonzero homotopy groups of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.) 75 (1969), 541-544.

Mahowald [16] [17] 与Mori [18]在1970 年代证明了：

对所有的$m \geq 5$，$\pi_m(S^5) \neq 0$。

---

[16] M. Mahowald, *Description homotopy of the elements in the image of the J-homomorphism*, Manifolds Tokyo, 255-264, Univ. of Tokyo Press, 1975.

[17] M. Mahowald, *The image of J in the EHP sequence*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 1, 65-112.

[18] M. Mori, *Applications of secondary e-invariants to unstable homotopy theory groups of spheres*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. Ser. A **29** (1975), 59-87.

对于$n=2,3$的情况，同伦论已知$\pi_m(S^2)\cong\pi_m(S^3)$（$m\geq 3$），所以两种情况实际上是一种情况。

对于S^2（或S^3）的同论群的非平凡性问题的历史故事比较有趣：Curtis [19]通过找到S^2 的一组2-挠分支的非平凡同论群元素证明了，

当$m\neq 1 \mod 8$，$\pi_m(S^2)\neq 0$；

所以只要找到$\pi_{8k+1}(S^2)$ 也有非平凡的元素，就能回答同论群的非平凡性问题。

[19]E. Curtis, *Some nonzero homotopy groups of spheres*, Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.) 75 (1969), 541-544.

Gray在他1984年发表的文章 [20]里给出S^3 的一组3-挠分支的非平凡同论群，但他没有意识到，他的结果加上Curtis的结果已经回答了S^2的同论群非平凡性问题；

几十年以来，一直被认为S^2（或S^3）是同论群非平凡性问题未解决的最后情况。

[20]B. Gray, *Unstable families related to the image of J*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **96 (1)** (1984), 95-113.

2015年，我们以解决同论群非平凡性问题为目标，通过谱序列计算，证明了，

对于任意一个奇素数p，$\mathbb{Z}/p \subseteq \pi_{(2p-2)k+1}(S^3)$，即存在一个次数为$p$的非平凡元素；特别地，取$p = 3, 5$，有$\mathbb{Z}/3 \subseteq \pi_{4k+1}(S^3)$以及$\mathbb{Z}/15 \subseteq \pi_{8k+1}(S^3)$，见文献 [21]；

在完成工作后再细查历史文献时，我们发现了Gray的1984年的工作（与我们不一样的方法）已经可以回答S^3 的同论群非平凡性问题。

[21] Ivanov, Sergei O.; Mikhailov, Roman; Wu, Jie *On nontriviality of certain homotopy groups of spheres*, Homology Homotopy Appl., **18** (2016), no. **2**, 337-344.

我们把自己的工作以及对Gray工作的发现通知了拓扑界包括Gray本人，在交流过程中，根据Doug Ravenel的评论[22]，我们提出下面猜想：

Ravenel猜想. 对于任意$n > 10$，$\pi_n(S^3)$的2-挠分支非平凡。

非零性猜想. 对于任意$n \geq 2$，存在某个K使得$\pi_k(S^n) \neq 0$（$k > K$）。

球面同论群的非平凡性意味着2-胞腔复形分类的复杂性。

[22]Ravenel的具体评论是：It could be the case that all other 2-components of $\pi_*(S^3)$ are nontrivial except $\pi_9(S^3)$ and $\pi_{10}(S^3)$.

多胞腔复形的伦型分类

对于3-胞腔复形的分类问题，不仅需要知道2-胞腔复形的分类信息还需要知道2-胞腔复形的同论群；

多胞腔复形的分类问题，以此类推。

需要指出的是，对一个复形添加一个胞腔，**稳定同论群**（一种广义同调群）可以有长正合列帮助计算；但天然版的同论群（即**非稳定同伦群**）会产生巨大的变化，其复杂度快速增长。

例如，两个2-球面的一点并$S^2 \vee S^2$，是对S^2在平凡意义下再添加一个2-维胞腔，由Hilton-Milnor定理可知，

对于任意$n \geq k \geq 2$，$\pi_n(S^k)$都会是$\pi_n(S^2 \vee S^2)$的一个直和因子；

换言之，$S^2 \vee S^2$的同论群包含了所有高维球面的所有同论群的信息。

再比如，3-维模2 Moore空间的第11个同论群已经非常复杂$\pi_{11}(P^3(2)) = \mathbb{Z}/2^{\oplus 14} \oplus \mathbb{Z}/4^{\oplus 2}$，见 [23]。

[23] Wu, Jie, *Homotopy theory of the suspensions of the projective plane*, Mem. Amer. Math. Soc. **162** (2003), no. 769, x+130 pp.

回路空间同伦分解的数学意义

假设X是带基点$*$的具有两个或更多胞腔的复形。回路空间

$$\Omega X = \{\lambda \colon S^1 \to X \mid \lambda(*) = *, \lambda \text{ continuous } \},$$

从基点出发回到基点的所有回路构成的函数空间。

- ΩX具有拓扑群的伦型。**群论的一些思想方法可以运用。**
- $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$。
- 假如$\Omega X \simeq A \times B \times C \times \cdots$，则

$$\pi_*(\Omega X) \cong \pi_*(A) \oplus \pi_*(B) \oplus \pi_*(C) \oplus \cdots .$$

同伦群可以分解为一些因子的直和。**本课程后面会讨论回路空间的分解。**

分类问题

对有限胞腔复形分类问题的另一个思路是对复形的维数与连通数比较接近的情况下进行分类。

张素诚先生在其1950年发表的文章[24]开启了这项研究，探讨了$(n-1)$-连通$(n+2)$-维复形并给出了分类，其不可同伦分解的因子被称为张复形；

需要指出的是，CW-复形的概念是J. H. C. Whitehead在1949年的文章引入的；在时空背景下，张先生的工作是非常先进及具有开创性。

[24] Chang S C., *Homology invariants and continuous mappings*, Proc. Roy. Soc. London. ser. A, **202** (1950), 253-263.

co-H-空间

尽管2-胞腔或更多胞腔复形的同论群会与球面同论群有着巨大的差异，球面同论群可以用于刻画3-胞腔复形结构的一些深刻性质。

一个co-H-空间X是指存在一个保基点的连续映射$\mu' \colon X \to X \vee X$使得合成映射

$$X \xrightarrow{\mu'} X \vee X = (X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X) \hookrightarrow X \times X$$

同伦于对角映射，这里x_0是X的基点；

即对角映射$X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x)$, 在同伦下，可以被形变压缩到一点并$X \vee X$。

非双角锥co-H-空间问题

一个空间X是co-H-空间当且仅当它的LS纲（Lusternik-Schnirelmann category）$\mathrm{cat}(X) = 1$。

任何一个双角锥（suspension）空间一定是一个co-H-空间；

但非双角锥的co-H-空间，人们知道的非常少，Berstein与Hilton在其1960年的文章[25]给出一个底维数是3、顶维数是$2p+1$ 的非双角锥的co-H 2-胞腔复形。

[25] I. Berstein, P. Hilton, Category and generalized Hopf invariants, Illinois J. Math. **4** (1960) 437-451.

文献[26]给出了，一个底部2-胞腔是3-维模2 Moore空间的3-胞腔复形何时成为一个非双角锥的co-H-空间的刻画；具体地说，对于任意$n \geq 5$，存在一个可裂的满同态$\partial_* : \pi_n(P^3(2)) \to \pi_{n-1}(S^3)$：

1. 假设$K = P^3(2) \cup_f D^{n+1}$是一个3-胞腔复形，这里$f : S^n \to P^3(2)$是粘接映射。如果$K$是一个co-$H$-空间，则$\partial_*([f]) \in \pi_n(S^3)$是次数为2的非平凡元素（即$\partial_*([f]) \neq 0$但$2 \cdot \partial_*([f]) = 0$）。

2. 反之给定任意一个次数为2的非零元素$\alpha \in \pi_n(S^3)$，则存在一个元素$[f] \in \pi_n(P^3(2))$ 满足$\partial_*([f]) = \alpha$使得3-胞腔复形$P^3(2) \cup_f D^{n+1}$是一个co-H 空间。

[26] Wu, Jie, *On co-H-maps to the suspension of the projective plane*, Topology Appl. **123** (2002), no. **3**, 547-571.

此结果给出一个吃惊的结论：所有6-维及其以上的底部2-胞腔是3-维模2 Moore空间的co-H 3-胞腔复形的伦型构成的集合，可以**映满S^3的次数为2的非平凡同论群元素构成的集合**；特别地，可以得到一系列（无限个）非双角锥的co-H-空间例子。

需要指出，S^3 的次数为2的同论群元素生成的子群具有很多奇特的性质；例如，由文献[27]的定理1.2可知，它是辫子群在某个组合群上作用的不动点子群。

[27] Wu, Jie *A braided simplicial group*, Proc. London Math. Soc. (3) **84** (2002), no. **3**, 645-662.

Theriault在文献[28]中首次发现一个漂亮的结果：**两个同伦余结合的co-H空间的smash积同伦等价于一个双角锥；**

不过同伦余结合律对co-H 空间的要求会太苛刻，因为一般的co-H是由回路空间的双角锥的同伦因子获得，余结合律往往难以检验；

文献[29] 把此结果推广到一般情况，**任意两个（整或p- 局部化的）道路连通有限型的co-H 空间的smash积同伦等价于一个双角锥，**

此结果意味着给出非双角锥co-H 空间的例子不太容易。

---

[28]Theriault, Stephen D. *Homotopy decompositions involving the loops of coassociative co-H spaces*, Canad. J. Math. **55 (1)** (2003), 181 – 203.

[29]Grbić, Jelena; Theriault, Stephen; Wu, Jie *Suspension splittings and James-Hopf invariants* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **144 (1)** (2014), 87 – 108.

技术层面，对于两胞腔的非双角锥co-H空间可以通过球面的EHP纤维序列（EHP fibre sequence）[30]研究，

对于一个双角锥ΣX 添加一个胞腔成为非双角锥co-H-空间，可以通过胖Hopf不变量（fat Hopf invariant）[31]。

[30]I. M. James, *On the ietrated suspension*, The Quarterly Journal of Mathematics, **5 (1)** (1954), 1 – 10.

[31]Wu, Jie, *On co-H-maps to the suspension of the projective plane*, Topology Appl. **123** (2002), no. **3**, 547-571.

co-H-空间范畴

如果把双角锥比拟为代数中的自由模（free module)，co-H空间相当于代数中的投射模（projective module)；代数中对投射模范畴的研究，对同伦论会有些启发。

co-H空间形成的范畴，在一点并(wedge)与smash积下是封闭的。

从表示论角度，对于两个co-H空间X与Y，将smash积$X \wedge Y$同伦分解为一组不可分解的co-H空间的一点并，**相当于研究co-H 空间范畴的Grothendieck群的乘法结构**，是同伦论中非常基本的问题。

由于同伦分解的困难度，整齐的结果不多；——有时**不是数学问题不好，是得到好的数学结果比较难。**

对n-维 mod p^r Moore空间$P^n(p^r)$（p为素数）与m-维Moore空间$P^m(q^s)$（q为素数）smash积，

$$P^n(p^r)\wedge P^m(q^s)\simeq\begin{cases}* & \text{当}\quad p\neq q\\ P^{m+n}(p^r)\vee P^{m+n-1}(p^r) & \text{当}\quad p=q, r\leq s, q^s\neq 2.\end{cases}$$

为平凡或两个 mod p^r空间的一点并[32]。

[32]Neisendorfer, J., *Algebraic Methods in Unstable Homotopy Theory*, New Mathematical Monographs), Cambridge: Cambridge University Press, 2010, xx+554pp. doi:10.1017/CBO9780511691638

例外的$p^r = q^s = 2$的情况，这时

$$P^n(2) \simeq \Sigma^{n-2}\mathbb{R}\mathrm{P}^2,\ n \geq 2,$$

是射影平面的双角锥，$P^n(2) \wedge P^n(2)$ 是不可分解的，

对于其多重自smash积，

$$P^n(2)^{\wedge k} = P^n(2) \wedge \cdots \wedge P^n(2),$$

文献[33]给出完整的结果，其不可分解因子（包括重数）一一对应于置换群模2 表示论的两行Young图的因子，每个不可分解因子的同调也能清晰给出；

[33]Wu, Jie, *Homotopy theory of the suspensions of the projective plane*, Mem. Amer. Math. Soc. **162** (2003), no. 769, x+130 pp.

例如，$P^n(2)^{\wedge 7}$是下面分解的一个多重双角锥：

$$(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)^{\wedge 7} \simeq \left(\mathbb{H}\mathrm{P}^2 \wedge \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \vee \bigvee^{6} \Sigma^3 (\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^{\wedge 2} \vee \bigvee^{14} \Sigma^6 \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \vee \bigvee^{8} S^9 \right) \wedge \mathbb{R}\mathrm{P}^2.$$

有趣的是，复射影平面与四元射影平面会出现在实射影平面的smash积的同伦分解式中；另外，通过稳定化操作，在稳定同伦范畴里，可以得到能够实现Steenrod代数交换化的谱。

对于一般的co-H 空间X，其k-重smash积$X^{\wedge k}$的p-局部化同伦分解，与置换群Σ_k的模p表示论有密切关系，情况会更加复杂；在函子性分解（functorial decomposition）的意义下，等价于置换群Σ_k 的模p表示论。**目前co-H空间范畴的Grothendieck群的乘法结构方面的研究还不是特别多，是非常值得深入研究的重要课题。**

同伦群的双曲性

对于有限复形分类问题，另一个视角是研究有限复形在伦型下的分布形态。

一个数学问题是，给定一个有限复形X，假设其同论群都是有限群（大量的有限复形具有这种性质，例如任意一个复形与 $\bmod p^r$ Moore空间的smash积都满足这个假设条件），对X 添加一个n-维胞腔得到一个复形$X \cup D^n$；固定一个正整数N，在X的同论群都是有限的假设下，所得到复形$X \cup D^n$（$n \leq N$）在伦型下**只有有限个**，其个数是依赖于N的函数$f(N)$，

我们可以研究**这个函数的增长率**；即当N在变大时，$f(N)$以什么样的速度增长。

转化为同论群的问题，受到有理同伦论经典的双曲性定理[34]的启发，文献[35]引入下面的概念：在下面的定义中p是一个素数。

定义. 一个空间X 被称为$\mathbb{Z}/p^r$-**双曲**，如果X的同论群的$\mathbb{Z}/p^r$-因子呈现指数增长，即

$$\liminf_n \frac{\ln\ t_n}{n} > 0, \tag{1}$$

where $t_n = \sharp\ \{\mathbb{Z}/p^r - \text{summands in}\ \oplus_{m\leq n}\ \pi_m(X)\}$.

[34]Y. Félix, S. Halperin and J.- C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **205**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[35]Huang, R., Wu, J. Exponential growth of homotopy groups of suspended finite complexes. Math. Z. **295** (2020), 1301-1321.

定义. 一个空间X 被称为p-**双曲**（或 mod p 双曲），如果X的同论群的p-挠分支呈现指数增长，即

$$\liminf_n \frac{\ln T_n}{n} > 0, \tag{2}$$

where $T_n = \sharp \{\mathbb{Z}/p^r - \text{summands in } \oplus_{m\leq n} \pi_m(X), r \geq 1\}$.

由Henn的结果[36]的定理1的推论]，对于单连通有限复形X，上面两定义中的下极限 1与 2均为有限数。

[36]H. -W. Henn, *On the growth of homotopy groups*, Manuscripta Math. **56** (1986), 235-245.

文献[37]的主要结果证明了，n-维 mod p^r Moore 空间$P^n(p^r)$（$n \geq 3, r \geq 1$)是$\mathbb{Z}/p^r$-与$\mathbb{Z}/p^{r+1}$-双曲；以及对于 mod 2 Moore空间$P^n(2)$（$n \geq 3$）是$\mathbb{Z}/2$-，$\mathbb{Z}/4$-与$\mathbb{Z}/8$-双曲。

这里需要指出，在$p > 2, n \geq 3, r \geq 1$的情况[38]以及$p = 2, n \geq 4, r \geq 6$的情况[39] $\mathbb{Z}/p^{r+1}$是$\pi_*(P^n(p^r))$的最大直和因子，即不存在$\mathbb{Z}/p^{r+2}$ 或更高次的直和因子；

对于$p^r \neq 2, n \geq 3$的情况，$\mathbb{Z}/p^{r+1}$是已知的$\pi_*(P^n(p^r))$的最大直和因子，猜想是没有指数更大的直和因子；

---

[37]Huang, R., Wu, J. Exponential growth of homotopy groups of suspended finite complexes. Math. Z. **295** (2020), 1301-1321.

[38]J. A. Neisendorfer, *The exponent of a Moore space*, in: Algebraic Topology and Algebraic K-theory, in: Annals of Math.Study, vol. **113**, Princeton University Press, 1987, pp. 35-71.

[39]Stephen D. Theriault, *Homotopy exponents of* mod 2^r *Moore spaces*, Topology **47** (2008) 369 – 398.

$p=2, n\geq 3$是最复杂的情况，由[40]（$n\geq 4$的情况）结合[41]（$n=3$情况），$\pi_*(P^n(2))$会出现可数无限个$\mathbb{Z}/8$-直和因子，这里
是$\mathbb{Z}/8$是$\pi_*(P^n(2))$（$n\geq 3$）中已知的最大直和因子，猜想是没有指数更大的直和因子。
上述概念的提出与$\pi_*(P^n(2))$的$\mathbb{Z}/8$-直和因子有关系，
在Cohen-Wu1995的文章中，对于$P^{4n+1}(2)$的情况，找到有$\mathbb{Z}/8$-直和因子的最低维同论群是

$$\pi_{120n-14}(P^{4n+1}(2)),$$

文献[42]对此作了改进，在$\pi_{56n-6}(P^{4n+1}(2))$中可以找到$\mathbb{Z}/8$-直和因子；

[40] F. R. Cohen and J. Wu, *A remark on the homotopy groups of* $\Sigma^n\mathbb{R}P^2$, Contemp. Math. **181**, Amer. Math. Soc. (1995) 65-81.

[41] Wu, Jie, *A product decomposition of* $\Omega^3_0\Sigma\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, Topology **37** (1998), no. **5**, 1025-1030.

[42] Chen, Weidong; Wu, Jie *Decomposition of loop spaces and periodic problem on* π_*. Algebr. Geom. Topol. **13 (6)** (2013), 3245-3260.

另一方面，文献[43]，当n是4 的倍数时，亚稳定(meta-stable)同论群$\pi_k(P^n(2))$（$k<4n-7$）中不存在$\mathbb{Z}/8$-直和因子。换言之，尽管发现$\pi_*(P^n(2))$（$n\geq 3$）拥有可数无限个$\mathbb{Z}/8$-直和因子，含有$\mathbb{Z}/8$-因子的同论群的维数跳跃非常快，尤其n 模4 等于0或1的情况，文献[44]的结果显示，当同伦群的维数充分大时，$\pi_*(P^n(2))$（$n\geq 3$）中的$\mathbb{Z}/8$-直和因子**会呈现指数态的增长**。近期的研究，文献[45]通过研究张复形给出$(n-1)$-连通$(n+2)$-维复形的$\mathbb{Z}/p$-双曲性；文献[46]证明了有一类复形具有p-双曲性。

---

[43]Mikhailov, Roman; Wu, Jie *On the metastable homotopy of mod 2 Moore spaces*. Algebr. Geom. Topol. **16(3)** (2016), 1773 – 1797.

[44]Huang, R., Wu, J. Exponential growth of homotopy groups of suspended finite complexes. Math. Z. **295** (2020), 1301-1321.

[45]Z.-J. Zhu and J.-Z. Pan. *The local hyperbolicity of A^2_n-complexes*. Homology Homotopy Appl. **23 (1)** (2021), pp. 367 – 386.

[46]Guy Boyde, *p-hyperbolicity of homotopy groups via K-theory*, arXiv:2101.04591.

猜想

p-双曲猜想. 设X是单连通的有限复形。则X是p-双曲当且仅当

$$\liminf_n \frac{\ln(\dim H_n(\Omega X;\mathbb{Z}/p))}{n} > 0.$$

换言之，同论群的p-双曲性等价于其回路空间 $\bmod p$ 同调群的双曲性。

$\mathbb{Z}/p^r$-双曲猜想 设X是单连通的有限复形满足

$$\liminf_n \frac{\ln(\dim H_n(\Omega X;\mathbb{Z}/p))}{n} > 0.$$

则X是$\mathbb{Z}/p^r$-双曲当且仅当存在某个n使得$\pi_n(X)$包含$\mathbb{Z}/p^r$作为一个子群。换言之，要么不出现$\mathbb{Z}/p^r$作为子群，要么$\mathbb{Z}/p^r$-直和因子会呈现指数型增长的频率出现。

同伦群的群结构

同论群的群结构的一种理解如下。设$[f] \in \pi_n(X)$，作为说明性的情况，我们假设n大于复形X的维数，容易得知添加胞腔后的复形$Y = X \cup_f D^{n+1}$的顶维整同调群$H_{n+1}(Y) = \mathbb{Z}$。

假设$[f]$ **是一个挠元素**，即存在某个$m > 1$使得$m \cdot [f] = 0$，则映射$f\colon S^n \to X$ 可以同伦延拓为从$(n+1)$-维Moore空间$P^{n+1}(m)$到X的一个映射，

从复形层面，通过把$P^{n+1}(m)$粘到X的办法，会得到复形$Z = Y \cup D^{n+2}$满足性质：Z的顶维整同调$H_{n+1}(Z) = \mathbb{Z}/m$，以及内射$Y \hookrightarrow Z$诱导出满同态$H_{n+1}(Y) = \mathbb{Z} \twoheadrightarrow H_{n+1}(Z) = \mathbb{Z}/m$;

换言之，“$m \cdot [f] = 0$”的信息，在几何上，添加一个胞腔后，可以把“顶维同调群$\mathbb{Z}$压缩为循环挠群$\mathbb{Z}/m$”。

反过来，假设X是单连通的复形，如果存在某个复形$Z = Y \cup D^{n+2}$满足所要求的性质，可以推出$m \cdot [f] = 0$。这样，$[f]$的次数m（即使得$m \cdot [f] = 0$的最小正整数m），在几何上体现为能够把Y的顶维同调群$\mathbb{Z}$压缩到最小的循环挠群$\mathbb{Z}/m$。

探测挠群的信息，一般使用p-**局部化**，把各个p-挠分支拆开单独研究；

在p-局部化下，$m = p^r$（某个$r \geq 1$）。假设$[f]$的次数为p^r，令Z_t（$t \geq r$）为$p^t \cdot [f] = 0$得到的复形$Y \cup D^{n+2}$，则会有一个序列

$$Y \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_{t+1} \longrightarrow Z_t \longrightarrow \cdots \longrightarrow Z_r$$

满足在顶维同调群形成压缩

$$H_{n+1}(Y) = \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow H_{n+1}(Z_{t+1}) = \mathbb{Z}/p^{t+1} \twoheadrightarrow H_{n+1}(Z_t) = \mathbb{Z}/p^t \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow$$

再看同论群元素的整除性情况。设$[f]=m\cdot[g]\in\pi_n(X)$，同样我们假设n大于复形X的维数，从复形层面，我们会得到一个映射

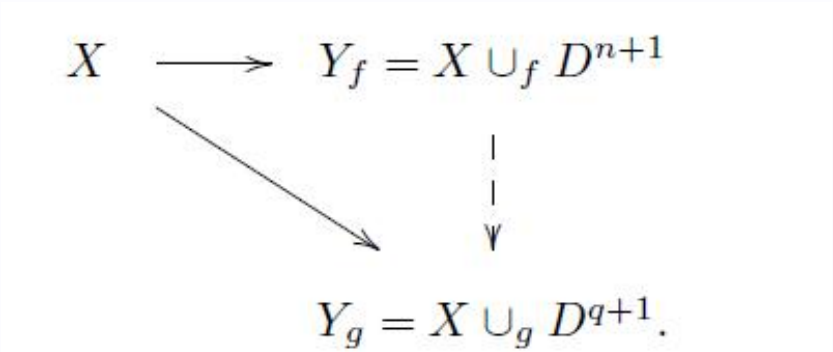
$$\phi\colon Y_f=X\cup_f D^{n+1}\longrightarrow Y_g=X\cup_g D^{n+1}$$

使得$\phi_*\colon H_{n+1}(Y_f)=\mathbb{Z}\longrightarrow H_{n+1}(Y_g)=\mathbb{Z}$是度数$m$，即$\phi_*(k)=km$（$k\in\mathbb{Z}$）。

反之，如果存在一个复形$Y'=X\cup D^{n+1}$以及一个映射$\theta\colon Y_f\to Y'$使得$\theta|\colon X\to X$是同伦等价以及$\theta_*\colon H_{n+1}(Y_f)=\mathbb{Z}\to H_{n+1}(Y')=\mathbb{Z}$是度数$m$，令$g\colon S^n\to X$为$Y'$的粘接映射，在$X$是单连通复形的假设下，$\theta|\colon X\to X$诱导的自同构，$\theta_*\colon\pi_n(X)\to\pi_n(X)$，会满足$\theta_*([f])=m[g]$，从而$[f]$可以被$m$整除。

同维数定向流形之间的映射度是几何拓扑的一个研究课题。

整除性的一个推广是映射在合成下的同伦分解，假设$f\colon S^n \to X$同伦于一个合成$S^n \xrightarrow{\alpha} S^q \xrightarrow{g} X$，会诱导出下面的同伦交换图



令$\mathcal{C}(X)$是X粘接一个胞腔的复形的伦型为对象、以上图为态射的范畴，则$[f] \in \pi_n(X)$在合成下的同伦分解会诱导出$\mathcal{C}(X)$的一个态射，即给出X添加一个胞腔复形间的一个关联性。

在稳定同论范畴里，反过来也成立，即范畴的态射会倒推出映射的同伦合成分解；在非稳定同伦范畴下，反过来一般不成立。

Nishida关于球面稳定同论群的幂零性定理[47]给出了2-胞腔复形在稳定同伦范畴的一个态射的结构。

在稳定同伦范畴，一般复形之间的态射的幂零性与周期性有很多经典的工作[48] [49]。

---

[47]Nishida, Goro (1973), *The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres*, Journal of the Mathematical Society of Japan, **25 (4)** (1973), 707-732.

[48]Devinatz, Ethan S.; Hopkins, Michael J.; Smith, Jeffrey H. (1988), *Nilpotence and stable homotopy theory. I*, Annals of Mathematics, Second Series, **128 (2)** (1988), 207-241.

[49]Ravenel, Douglas C., *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, Annals of Mathematics Studies, **128**（1992）, Princeton University Press, ISBN 978-0-691-02572-8

同伦群的指数问题

同伦论的一个重要问题是关于同伦群的指数问题（exponent problem）。

对于一个空间X，**同论群的p-指数函数与p-指数**分别定义为：

$$\exp_{\pi_*(X)}(n) = \sup_{1<j\leq n} \inf\{p^r \mid p^r \cdot \mathrm{Torsion}_p(\pi_j(X)) = 0\}, \quad n \geq 2,$$

$$\exp_p(\pi_*(X)) = \lim_{n\to\infty} \exp_{\pi_*(X)}(n),$$

这里$\mathrm{Torsion}_p(\pi_j(X))$是群$\pi_j(X)$的$p$-挠分支；

当需要特意突出素数p时，我们把$\exp_{\pi_*(X)}(n)$记为$p-\exp_{\pi_*(X)}(n)$。在此定义中，由于我们主要的关注点是高维同论群，我们把基本群（一般非交换）排除在外。我们称一个空间X的同论群具有**有界p-指数**(bounded p-exponent)，如果

$$\exp_p(\pi_*(X)) < +\infty;$$

否则称为无界p-指数（unbounded)。我们称一个空间X的同论群具有**准有界p-指数**(semi-bounded p-exponent)，如果，对于回路空间ΩX的p-局部化下的每一个同伦不可分解收缩核（homotopy indecomposable retracts of the p-localization of ΩX）A，

$$\exp_p(\pi_*(A)) < +\infty.$$

一个空间X的同伦群具有有界p-指数一定具有准有界p-指数，反之未必。

例子，$X = S^2 \vee S^2$。

证明需要用到：1)Hilton-Milnor定理；2)任一维数的球面同伦群具有有界p-指数。

同论群的p-指数函数$\exp_{\pi_*(X)}(n)$（依赖于n）测量$\pi_n(X)$及其以下同论群的p-指数，其增长率反应同论群中$\mathbb{Z}/p^r$-因子的指数变化。同论群指数问题的第一个结果是James得到，他在文献[50]中给出奇维球面的2-指数的一个上界，开启了同论群指数问题的研究。

$$\exp_2(\pi_*(S^{2n+1})) \leq 4^n.$$

[50] James, I. M., *On the suspension sequence*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 74 – 107.

著名的Cohen-Moore-Neisendorfer 定理如下：在下面的定理中，$p > 3$的情况在文献[51]中给出，$p = 3$的情况，由Neisendorfer单独完成[52]。

Cohen-Moore-Neisendorfer定理（CMN定理）. 对于任意一个奇素数p，

$$\exp_p(\pi_*(S^{2n+1})) = p^n, \quad n \geq 1.$$

其中$n = 1$的情况是Paul Selick的结果[53]

---

[51]F. R. Cohen, J. C. Moore and J. A. Neisendorfer, *The double suspension and exponents of homotopy groups of spheres*, Ann. of Math., **110** (1979), 549-565.

[52]Neisendorfer, Joseph A., *3-primary exponents*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **90 (1)** (1981), 63 – 83.

[53]Selick, Paul, *odd primary torsion in* $\pi_k(S^3)$, Topology **17** (1978), 407-412.

这里需要提一下，在奇素数p的局部化之下，

$$\Omega S^{2n} \simeq S^{2n-1} \times \Omega S^{4n-1},$$

所以偶维球面的奇素数指数问题可以转化为奇维球面的指数问题。

当$p = 2$，James已经给出球面同论群的2-指数是有界的，Selick[54]对James的上界作了改进；

一般情况，球面同论群的2-指数还是未解决的经典问题之一；

[54]Selick, Paul, 2-*primary exponents for the homotopy groups of spheres*, Topology **23 (1)** (1984), 97-99.

对于奇维球面情况，S^3的同论群2-指数与James 的上界一致，S^5的同论群的2-指数与Selick的上界一致，第一个未解决的情况是S^7的2-指数，已知的上界是32，猜想如下：

7-维球面指数猜想. 7-维球面的同论群2-指数$\exp_2(\pi_*(S^7)) = 8$。

同论群的计算，人们付出过大量的研究并取得丰硕的成果，由于球面同论群是关键第一步，经典工作大多集中于球面同论群的计算。具有深远意义的计算工具是James在其1954年发表的文章[55] 发现的球面同论群的EHP序列，即，在2-局部化下，我们会有下面的长正合列：

$$\cdots \xrightarrow{P} \pi_r(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{r+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{r+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{r-1}(S^n) \xrightarrow{E} \cdots .$$

这一序列给不同维数的球面的同论群建立了关联性。

[55] I. M. James, *On the ietrated suspension*, The Quarterly Journal of Mathematics, **5 (1)** (1954), 1 – 10.

Toda使用EHP序列（包括他引入的奇素数局部化下的EHP型序列），以及他本人引入的被后来人们称之为Toda bracket的二层次运算，作为主要工具，1962年出版了计算同论群的第一本书[56]，完整地计算了同论群$\pi_{n+k}(S^n)$（$k \leq 19$）。

球面同论群的计算以及相关研究一直持续不断，Mahowald 以及国内的周学光先生毕生的精力以球面同论群的计算为核心展开；

[56] Hirosi Toda, *Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres*, Annals of Mathematics Studies **49** (1962), Princeton University Press, 193pp.

Adams于1958年引入的谱序列[57]（著名的Adams谱序列）及其推广（如使用广义同调的Adams-Novikov 谱序列）是计算稳定同论群的主要工具；

对于非稳定同论群，六位作者（BCKQRS）于1966年发表了利用**单纯群的** mod p **降中心序列**给出了非稳定Adams 谱序列[58]。

[57] Adams, J. Frank, *On the structure and applications of the Steenrod algebra*, Commentarii Mathematici Helvetici, **32 (1)** (1958), 180-214.

[58] A.K. Bousfield, E.B. Curtis, D.M. Kan, D.G. Quillen, D.L. Rector, J.W. Schlesinger, *The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence*, Topology, **5** (1966), 331-342.

需要指出，无论几何层面还是组合层面引入谱序列，所获得的谱序列的高阶微分结构与纤维化塔的选取有关联性，以计算同论群为导向的谱序列理论本身也在不断发展中，如Ravenel在研究Adams-Novikov谱序列时引入染色谱序列[59]。

以单纯群为例，BCKQRS谱序列是利用Dan Kan给出的回路空间的自由群模型（单纯群中每一维的群结构是自由的）通过 mod p 降中心序列得到的谱序列；理论上，一个回路空间在伦型下可以有群结构很不一样的单纯群模型，不同的群结构以及不同的单纯子群滤子有可能会获得不同结构的谱序列。

[59] Ravenel, Douglas C. (1978), *A novice's guide to the Adams - Novikov spectral sequence*, Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II, Lecture Notes in Math., **658**, Berlin: Springer, pp. 404-475.

基于文献[60] 发现的同论群的组合描述，用辫子群、链环群、映射类群来建立回路空间的单纯群模型也有很多研究[61] [62] [63] [64] [65] [66]。

[60]Wu, J., *Combinatorial descriptions of homotopy groups of certain spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **130** (2001), no. **3**, 489-513.

[61]Bardakov, V. G.; Mikhailov, R.; Vershinin, V. V.; Wu, J., *Brunnian braids on surfaces*, Algebr. Geom. Topol. **12** (2012), no. **3**, 1607-1648.

[62]Berrick, A. J.; Cohen, F. R.; Wong, Y. L.; Wu, J., *Configurations, braids, and homotopy groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. **2**, 265-326.

[63]Berrick, A. J.; Hanbury, E.; Wu, J., *Delta-structures on mapping class groups and braid groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. **4**, 1879-1903.

[64]Lei, Fengchun; Li, Fengling; Wu, Jie, *On simplicial resolutions of framed links* Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. **6**, 3075-3093.

[65]Li, J. Y.; Wu, J., *On symmetric commutator subgroups, braids, links and homotopy groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. **7**,3829-3852.

[66]Mikhailov, R.; Wu, J., *Combinatorial group theory and the homotopy groups of finite complexes*, Geom. Topol. **17** (2013), no. **1**, 235-272.

在2-胞腔复形的计算方面，文献[67] 计算了 mod 2 Moore 空间的同论群$\pi_m(P^n(2))$ $(m \leq n+8)$。

有别于球面的情况，对于两个或更多胞腔的有限复形，其同伦群往往极为庞大。对回路空间ΩX的同伦分解研究极为重要。

[67] Wu, Jie, *Homotopy theory of the suspensions of the projective plane*, Mem. Amer. Math. Soc. **162** (2003), no. 769, x+130 pp.

一个精彩的经典范例是Cohen，Moore，Neisendorfer在1970年代末通过Moore空间的回路空间的同伦分解研究，成功地解决了奇素数局部化下的球面及Moore 空间的同论群的指数问题[68] [69] [70]；

对co-H-空间的回路空间系统化地进行函子性分解起始于[71]。

---

[68] F. R. Cohen, J. C. Moore and J. A. Neisendorfer, *Torsion in homotopy groups*, Ann. of Math., **109** (1979), 121-168.

[69] F. R. Cohen, J. C. Moore and J. A. Neisendorfer, *The double suspension and exponents of homotopy groups of spheres*, Ann. of Math., **110** (1979), 549-565.

[70] F. R. Cohen, J. C. Moore and J. A. Neisendorfer, *Exponents in homotopy theory*, Algebraic topology and algebraic K-theory (Princeton, N.J., 1983), Ann. of Math. Stud., **113** (1987), 3-34.

[71] Selick, Paul; Wu, Jie, *On natural coalgebra decompositions of tensor algebras and loop suspensions*, Mem. Amer. Math. Soc. **148** (2000), no. **701**, viii+109 pp.

需要指出，同论群的结构、同论群元素的性质以及同论群元素间的关联性等信息也非常重要。例如，$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$，由Hopf 映射η: $S^3 \to S^2$ 的同伦类生成；

Hopf映射及其几何意义，以及Hopf映射的代数性质（其同伦类生成无限循环群$\mathbb{Z}$）构成$\pi_3(S^2)$的信息；

$\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}/2$（$n \geq 3$），由Hopf映射的多重双角锥的同伦类生成，几何信息清晰，代数信息告知Hopf映射的双角锥及多重双角锥的同伦次数为2。

不唯出身论，但同伦群元素的“出身”还真是很重要。

鉴于同论群元素自身的重要性，很多计算给出一组特殊性质的元素，例如，J-同态[72] [73] 的像的元素[74] [75]，Morava K-理论[76]引出的v_n-周期元素；很多广义同调可以帮助同论群的计算，如Segal 在1988年引入的椭圆上同调(elliptic cohomology)[77]，以及Morava E-理论发展出来的染色同伦论（chromatic homotopy theory）等。

---

[72] Adams, J. F., *On the groups $J(X)$ I*, Topology, **2 (3)**(1963), 181-195.

[73] Whitehead, George W., *On the homotopy groups of spheres and rotation groups*, Annals of Mathematics, Second Series, 43 (4)(1942), 634-640.

[74] Adams, J. F., *On the groups $J(X)$ IV*, Topology, **5** (1966), 21-71.

[75] Quillen, Daniel, *The Adams conjecture*, Topology, **10** (1971), 67-80.

[76] Johnson, David Copeland, Wilson, W. Stephen, *BP operations and Morava's extraordinary K-theories*, Math. Z., **144 (1)** (1975): 55-75.

[77] Segal, Graeme, *Elliptic cohomology*, Séminaire Bourbaki, volume **1987/88**, exposés 686-699, Astérisque, no. **161-162** (1988), Exposé no. **695**, 15 p.

连接稳定同伦论与非稳定同伦论的一个重要理论工具之一是Goodwillie演算（Goodwillie Calculus)，由Goodwillie的系列文章[78] [79] [80]引入，粗略地说，把空间到无穷回路空间的函子$X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty X = Q(X)$ 视为线性函子，Goodwillie塔(Goodwillie Tower)相当于函子意义下的Taylor展开：

$$X \to \cdots\cdots \to P_n(X) \to P_{n-1}(X) \to \cdots \to P_1(X) = Q(X),$$

纤维化的塔，其中每个$P_n(X) \to P_{n-1}(X)$的纤维是无穷回路空间。

Mahowald与Arone[81]给出Goodwillie塔在（非稳定）球面同论群中的一个重要应用。

---

[78] T. Goodwillie, Calculus I: The first derivative of pseudoisotopy theory, K-theory 4 (1990), 1-27.

[79] T. Goodwillie, Calculus II: Analytic functors, K-theory 5 (1992), 295-332.

[80] T. Goodwillie, Calculus III: Taylor series, Geom. Topol. 7 (2003), 645-711.

[81] Greg Arone and Mark Mahowald, *The Goodwillie tower of the identity functor and the unstable periodic homotopy of spheres*, Invent. Math. **135** (1999), 743–788.

粗略地说，代数拓扑是以几何体同伦分类（分类问题）为出发点，以同论群为脊椎线（backbone），为了攻克同论群，发展出了众多理论，形成庞大的学科。

下面再简单介绍一些代数拓扑在数学其它领域的应用。

协边理论

代数拓扑对几何体的一个成功应用是解决了流形在协边意义下的分类。

两个m-维闭流形M与N被称之为协边的，如果存在一个$(m+1)$-维带边紧致流形W使得其边界∂W同胚于M与N 的不交并。

例如，m-维球面S^m与空集是协边的，因为它是$(m+1)$-维球体的边界。一个m-维闭流形M总是与自己协边的，因为可以取$W = M \times [0,1]$，其边界是$M \times \{0\}$与$M \times \{1\}$。

并非任意两个m-维闭流形都是彼此协边的，例如，可以证明射影平面$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$与2-维球面S^2是不可能协边的。

一个数学问题是对闭流形在协边关系下给出分类。

历史上，协边理论在Poincare的1895年文章[82]里就有些稚型但含糊不清，

Pontryagin在1950年正式引入协边理论，文章的发表延后几年[83]；

[82]Poincaré, Henri, *Analysis situs* Journal de l'École Polytechnique (2). **1** (1895), 1-123.

[83]L. S. Pontryagin, *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **45**, Acad. Sci. USSR, Moscow, 1955, 3-139.

Thom在其1951年的博士论文[84]就研究了协边理论，

在其后的1954年的论文[85]完全解决了紧致非定向流形的协边分类问题，并于1958年获得菲尔茨奖。

Thom是将协边分类问题，通过后来人们称之为Thom 构造的方法，转化为同伦论问题；即紧致非定向流形在协边关系下的等价类具有环结构（加法由不交并给出，乘法由流形的乘积给出）同构于Thom谱的同论群，并且成功地计算了Thom 谱的同论群，给出紧致非定向流形的协边分类问题的一个完美解答。

---

[84]Thom, René, *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Série 3, **69** (1952): 109 - 182

[85]R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*, Commentari Mathematici Helvetici, vol. **28** (1954), pp. 17-86.

K-理论

代数拓扑对几何体的另一个成功应用是解决了向量丛的稳定分类问题（K-理论）。

基本问题是：给定一个几何体X，在丛同构意义下，对其上的向量丛进行分类。

此问题与向量丛的结构群（李群）G有关系，可以转化为同伦论问题；确切地说，X上结构群为G的向量丛的同构类一一对应于，从X到G的分类空间BG的连续映射的同伦类，所以X上向量丛分类问题等价于求解同伦类集$[X, BG]$，见[86]。

[86] Husemöller, Dale, *Fibre Bundles*, -3rd ed. Graduate Texts in Mathematics **20**, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1994, 353pp. ISBN 0-387-94087-1

向量丛的稳定分类问题指得是，将丛同构要求降低为，X上的两个向量丛分别与平凡丛作Whitney和后会成为丛同构；

例如球面的切丛除了例外情况在丛同构下是非平凡的，但稳定化之后是平凡的，球面的法丛是平凡丛，以及球面的切丛与法丛的Whitney和是平凡的。

以没有结构性限制要求的实向量丛分类为例，X上n-维向量丛的结构群是n-次正交群$O(n)$，即所有n阶正交阵构成的矩阵群；对于$A \in O(n)$，可以按下面的（方块阵）的方式

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

视为$(n+1)$阶正交阵，从而$O(n)$可以视为$O(n+1)$的子群，一直下去得到

$$O(n) \subseteq O(n+1) \subseteq O(n+2) \subseteq \cdots \subseteq O(n+k) \subseteq \cdots,$$

单调递增的群序列，让k趋向于无穷，其极限（即上述群序列的并）极为O。则X上实向量丛的稳定分类问题等价于求解$[X, BO]$；

Bott 的杰出工作[87] [88]给出BO的同论群具有周期为8的性质，即

$$\pi_{n+8}(BO) \cong \pi_n(BO),$$

并计算了8个同论群（对于复向量丛的情况，周期为2），完美地回答了球面上向量丛的稳定分类问题；

对于一般的复形X，同伦类集合$[-, BO]$满足广义同调论的要求，从而可以用广义同调（K-理论）求解。

---

[87] Bott, Raoul, *The stable homotopy of the classical groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **43 (10)** (1957), 933-935.

[88] Bott, Raoul, *The stable homotopy of the classical groups*, Annals of Mathematics, Second Series, **70 (2)** (1959), 313 – 337.

非稳定K-理论(unstable K-theory)

需要指出，向量丛分类问题的原始问题，即不作稳定化处理的丛同构分类问题，远未得到解决。

以n-维实向量丛分类问题为例，需要求解$[X, BO(n)] \cong H^1(X; \mathbb{Z}/2) \times [X, BSO(n)]$，这里$SO(n)$ 是行列式为1的n阶正交阵的矩阵群；第一个因子$H^1(X; \mathbb{Z}/2)$比较容易计算，

第二个因子$[X, BSO(n)]$是关键难点。取$X = S^m$为m- 维球面，则

$$[S^m, BSO(n)] \cong [S^{m-1}, SO(n)] = \pi_{m-1}(SO(n))$$

是一个计算李群$SO(n)$的同论群问题。

当$m < n$时，

$$[S^m, BSO(n)] \cong [S^m, BSO(n+1)] \cong [S^m, BSO(n+2)] \cong \cdots \cong [S^m, BSO],$$

利用Bott定理可以给出答案；

对于一般的m，问题会非常艰难。

对于n非常小的情况，我们可以再细看一下这个问题。

当$n = 1$时，即X上的实的线丛（1-维实向量丛）的分类由其第一个 mod 2 上同调群完全刻画。

当$n=2$时，则

$$BSO(2)\simeq \mathbb{C}\mathrm{P}^{\infty}\quad [X,BSO(2)]\cong H^2(X;\mathbb{Z}),$$

从而X上的2-维实向量丛的分类由其第1个 $\bmod 2$ 上同调群与第2个整上同调群完全刻画。

当$n=3$时，问题的难度会出现质的飞跃，是第一种非平凡的情况。

由于$SO(3)$的万有覆叠空间（2 重覆叠）是S^3（看成3 阶旋量群，spin group，$Spin(3)$），容易得到一个纤维化序列（fibre sequence）及其导出的带基点集合的正合列：

$$BS^3 \simeq \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow BSO(3) \longrightarrow K(\mathbb{Z}/2,2) \Longrightarrow$$

$$[X,\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty] \longrightarrow [X,BSO(3)] \longrightarrow [X,K(\mathbb{Z}/2,2)] \cong H^2(X;\mathbb{Z}/2),$$

这里$\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty$是无穷维四元射影空间。

换言之，可以通过第2个 mod 2 上同调$H^2(X;\mathbb{Z}/2)$以及$[X,\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty]$来研究$[X,BSO(3)]$。

研究$[X, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty]$，可以通过Postnikov塔（Postnikov system）的办法[89]得到纤维化序列，

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty\langle 4\rangle \longrightarrow \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 4) \Longrightarrow$$

$$[X, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty\langle 4\rangle] \longrightarrow [X, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty] \longrightarrow H^4(X; \mathbb{Z}),$$

这里$\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty\langle 4\rangle$是$\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty$ 的4-连通覆叠。

问题的难点又转移到研究$[X, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty\langle 4\rangle]$。

[89] Whitehead, George W., *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer-Verlag New York, 1978, XXI, 746.

空间$\mathbb{HP}^\infty\langle 4\rangle$具有无限维但有限型的复形的伦型（即每个固定维数的胞腔个数是有限个，但复形中的胞腔维数会趋于无穷），其同论群均为有限挠群，

第一个非平凡同论群是$\pi_5(\mathbb{HP}^\infty\langle 4\rangle) = \mathbb{Z}/2$;

对于同伦类集$[X, \mathbb{HP}^\infty\langle 4\rangle]$的研究，比较有效的同伦论办法是进行$p$-局部化，即把不同素数$p$的挠分支分离开来研究；

在X的维数不是特别高的情况下，运用大量的同伦论工具技巧是有希望确定$[X, \mathbb{HP}^\infty\langle 4\rangle]$;

对于一般的复形X，问题的难度会远远超出人类目前掌握的知识技能。

如果$X = \Sigma Y$是一个双角锥，则$[X, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty] \cong [Y, S^3]$，即问题转化为空间$Y$的第3个上同伦集。

如上面所述，对于Y的维数不是特别高的情况，是有希望确定$[Y, S^3]$；对于一般情况，问题的难度会超出现有的能力。

当$X = S^m$是一个球面时，$[S^m, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty] \cong \pi_{m-1}(S^3)$是$S^3$的同论群问题。对于2-维复向量丛分类问题以及1-维四元向量丛分类问题，情况类似，会归结到$\mathbb{H}\mathrm{P}^\infty$或$S^3$的同伦论问题。

拓扑相关的一些著名几何定理/理论: Calabi-Yau理论[90]，Atiyah-Singer指标定理[91] [92]及各种推广[93] [94]，Chern-Gauss-Bonnet定理[95], Hirzebruch-Riemann-Roch定理、Hirzebruch signature theorem[96], Grothendieck-Riemann-Roch 定理[97], Chern-Simons理论[98]等。

[90] Yau, Shing-Tung and Nadis, Steve; The Shape of Inner Space, Basic Books, 2010.

[91] Atiyah, M. F.; Singer, Isadore M., *The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **69 (3)** (1963), 422-433.

[92] Shing-Tung Yau, ed., *The Founders of Index Theory* (2nd ed.), Somerville, Mass.: International Press of Boston,2009.

[93] Donaldson, S.K.; Sullivan, D., *Quasiconformal 4-manifolds*, Acta Math., 163 (1989), 181-252.

[94] Connes, A.; Sullivan, D.; Teleman, N., *Quasiconformal mappings, operators on Hilbert space and local formulae for characteristic classes*, Topology, *33 (4)* (1994), 663 - 681.

[95] Chern, Shiing-shen, *On the Curvatura Integra in a Riemannian Manifold.* Ann. Math. **46 (4)** (1945), 674 - 684.

[96] Hirzebruch, Friedrich (1995) [1978]. *Topological methods in algebraic geometry.* Berlin: Springer-Verlag.

[97] A. Grothendieck, *Classes de faisceaux et théorème de Riemann - Roch* (1957). Published in SGA **6**, Springer-Verlag (1971), 20-71.

[98] Chern, S.-S. and Simons, J. *Characteristic forms and geometric invariants.* Ann. Math. **99 (1)**(1974), 48 - 69.

代数K-理论

拓扑K-理论的代数版本是代数K-理论。历史上，如何合理地定义高阶代数K-群，人们给出各种版本，总是不理想；Quillen在1970年代初用两种可以互通的方法，加-构造与Q-构造，对高阶代数K- 群给出完美的定义[99] [100] [101]，并因此获得1978 年的菲尔茨奖。

[99] Quillen, Daniel, *Higher algebraic K-theory. I*, Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math, **341**, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1973, pp. 85-147.

[100] Quillen, Daniel, *Higher algebraic K-theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. **1**, Montreal, Quebec, Canad. Math. Congress, 1975, pp. 171 – 176.

[101] Quillen, Daniel, *Higher K-theory for categories with exact sequences*, New developments in topology (Proc. Sympos. Algebraic Topology, Oxford, 1972), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **11**, Cambridge University Press, 1974, pp. 95-103.

Quillen 的加-构造[102]简述如下：给定一个带单位元的环R，考察R上的n- 阶一般线性群$\mathrm{GL}(n,R)$，即R 上所有n 阶可逆矩阵构成的群，如分块矩阵 (3)的办法，$\mathrm{GL}(n,R)$可视为$\mathrm{GL}(n+1,R)$ 的子群，取极限得

$$\mathrm{GL}(R)=\bigcup_n \mathrm{GL}(n,R)$$

从群$\mathrm{GL}(R)$，我们可以得到一个它的分类空间$B\mathrm{GL}(R)$，这是一个道路连通的复形，其基本群是$\mathrm{GL}(R)$，以及其同论群$\pi_n(B\mathrm{GL}(R))=0\ (n\geq 2)$。

[102]加-构造是Kervaire 在1969 年[103] 引入，Quillen 把加-构造用到了代数K-理论上。也许Quillen 的工作太著名了，人们习惯称Quillen 的加构造。

由对角线上全是单位元1、对角线之外只有一个非零元素的初等矩阵生成$\mathrm{GL}(n,R)$的一个子群，记为$E(n,R)$；让n趋于无穷得到，$\mathrm{GL}(R)$的子群

$$E(R)=\bigcup_n E(n,R).$$

$E(R)=[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]$是$\mathrm{GL}(R)$的换位子群，并且$E(R)$是一个完全群（perfect group）。Quillen的加-构造$B\mathrm{GL}(R)^+$是一个对$B\mathrm{GL}(R)$添加2-维及其高维胞腔的复形，满足下面的条件：

1. 内射$B\mathrm{GL}(R)\hookrightarrow B\mathrm{GL}(R)^+$诱导出同调群同构，即加-构造保持同调群不变；
2. 基本群$\pi_1(B\mathrm{GL}(R)^+)=\mathrm{GL}(R)/E(R)=\mathrm{GL}(R)^{\mathrm{ab}}$，是$\mathrm{GL}(R)$的交换化商群(abelianization)。

Quillen将代数K-群定义为：

$$K_n(R)=\pi_n(B\mathrm{GL}(R)^+),\quad n>0. \tag{4}$$

直观地说，我们可以通过一组2-维胞腔的方式来消灭$B\mathrm{GL}(R)$的基本群中的换位子元素$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$，在保证同调不变性的要求下，我们需要再添加3-维及其以上的胞腔来完成构造$B\mathrm{GL}(R)^{+}$；

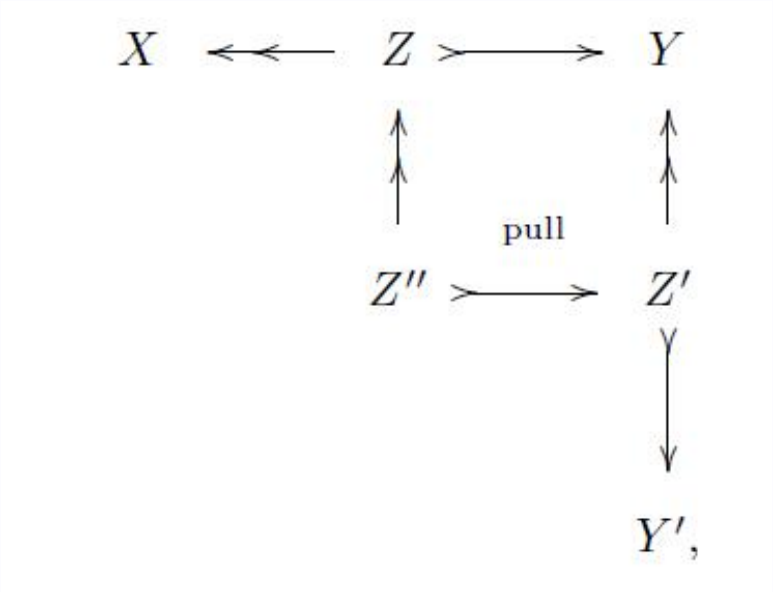
原本的空间$B\mathrm{GL}(R)$并没有高阶同论群，但添加胞腔后的空间$B\mathrm{GL}(R)^{+}$ 会产生高阶同论群，Quillen以此作为高阶K-群。

Quillen的这个定义，从表面看，说服力似乎还不够强；Quillen随后引入Q-构造，从范畴的角度予以刻画，给出完美的答案。

粗略地说，Quillen的Q-构造如下；给定一个正合范畴$\mathcal{C}$（粗略地说，一个加法范畴以及满足某些条件的短正合列构成的类E；将E中的这类特殊短正合列中的单态射称为可许单同态（admissible monomorphism），记为$\rightarrowtail$，满态射称为可许满同态（admissible epimorphism），记为$\twoheadrightarrow$（具体参看Quillen的文献）；可以构造一个新的范畴$Q\mathcal{C}$，其对象与$\mathcal{C}$ 相同，从X到Y的态射为下图的同构类：

$$X \twoheadleftarrow Z \rightarrowtail Y,$$

态射X到Y与态射Y到Y'的合成由下面的交换图获得



其中Z''是由拉回（pull-back）给出，这里，对类E的条件要求（可许单同态（满同态）的拉回还是可许，可许单同态（满同态）的合成还是可许），确保了上图确实给出态射

$$X \twoheadleftarrow Z'' \rightarrowtail Y'.$$

令$BQ\mathcal{C}$ 为范畴$Q\mathcal{C}$ 的神经复形（nerve）[104] 的几何实现，Quillen 定义

$$K_n(\mathcal{C}) = \pi_n(\Omega BQ\mathcal{C}) \cong \pi_{n+1}(BQ\mathcal{C}). \tag{5}$$

给定一个带单位元的环R，令$\mathcal{C}$为R上有限生成的投射模（projective module）范畴，Quillen的Q-构造定义的代数K-群与其加-构造所定义的代数K-群一致。

[104] 一个范畴$\mathcal{A}$的神经复形，粗略地说是$\mathcal{A}$的道路形成的单纯集，即顶点集为$\mathcal{A}$的对象集$\mathcal{N}\mathcal{A}$，1-维单形集为态射集$X_0 \to X_1$，2-维单形集由所有两次态射$X_0 \to X_1 \to X_2$构成，以此类推，面算子$d_i : \mathcal{N}_n\mathcal{A} \to \mathcal{N}_{n-1}\mathcal{A}$，$0 \le i \le n$，为（计数从0 开始的）第$i$个对象以及将打到及打出这个对象的态射作合成（对于起始的d_0与最后的d_n则去掉关联态射），退化算子$s_i : \mathcal{N}_n\mathcal{A} \to \mathcal{N}_{n+1}\mathcal{A}$，$0 \le i \le n$，为重复（计数从0开始的）第$i$个对象以恒等态射相接。为了避免集合论的悖论，这个构造会要求$\mathcal{A}$是一个“小范畴”，即$\mathcal{A}$的所有态射构成的类是一个集合。

同伦代数与模型范畴

Quillen在代数K-理论的工作，很大程度源自于与其之前对同伦论的抽象化理解；

Quillen通过引入模型范畴（model category）的概念在抽象范畴上建立同伦论[105]，使得同伦论思想可以灵活地应用于其它领域。

[105] Daniel G. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics **43**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967, V+160pp.

运用Quillen 的模型范畴理论，Veovodsky成功地把同伦论应用于代数几何，建立了概型（scheme）的同伦论[106] [107]，发展出motivic 上同调理论并解决了代数几何与代数K-理论领域的Milnor 猜想[108] [109]，因此获得2002年的菲尔茨奖。

---

[106] Morel, Fabien; Voevodsky, Vladimir, *A^1-homotopy theory of schemes*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 90 (90) (1999), 45 – 143.

[107] Voevodsky, Vladimir (1998), *A^1-homotopy theory*, Documenta Mathematica, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. **I** (Berlin, 1998): 579 – 604

[108] F. Morel, *Voevodsky's proof of Milnor's conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1998), 123-143.

[109] V. Voevodsky. *The Milnor conjecture*, preprint 1996.

Voevodsky起始于2006 年的工作将抽象同伦论应用于数理逻辑与计算机科学[110] [111]，导致“同伦类别理论”（homotopy type theory）作为新学科领域的诞生[112] [113]。

[110] Alvaro Pelayo and Michael A. Warren, *Homotopy type theory and Voevodsky's univalent foundations*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (2014), 597-648.

[111] V. Voevodsky, *A very short note on the homotopy λ-calculus*, Unpublished note, 2006.

[112] David Corfield, Modal Homotopy Type Theory: The Prospect of a New Logic for Philosophy, Oxford University Press, 2020, 192pp.

[113] Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, Univalent Foundations, 2013, 589pp.

拓扑组合学

Lovász[114]在1978年成功地将同伦论应用于组合[115]，成为拓扑组合学的奠基性工作。

给定一个图G，Lovász定义G 的邻里复形（neighborhood complex）$\mathcal{N}(G)$为一个（抽象）单纯复形：其顶点与G一样，G的顶点集$V(G)$ 的一个子集S是$\mathcal{N}(G)$当且仅当S中的元素具有一个公共的邻居（neighbor)，即存在G中的一个顶点v，它与S中的每一个元素均有边连接。

[114]Lovász因其在组合学的杰出工作，1999年获得沃尔夫奖（Wolf Prize）。

[115]Lovász, L. *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Theory Ser. A **25** (1978), no. **3**, 319-324.

Lovász在这篇经典文章中的定理2给出：如果复形$\mathcal{N}(G)$是$(k-2)$-连通，则图G不存在k 染色。

利用这一结果，他解决了组合学中著名的Kneser猜想[116]。

邻里复形概念被Lovász进一步推广到Hom复形（Hom-complex）的概念[117] [118]，并在近些年取得了拓扑组合学领域的一个突破性成果[119]。

---

[116] M. Kneser, *Aufgabe 300*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. **58** (1955).

[117] Eric Babson and Dmitry N. Kozlov, *Complexes of graph homomorphisms*, Israel J. Math. 152 (2006), 285-312.

[118] Dmitry N. Kozlov, *Simple homotopy types of Hom-complexes, neighborhood complexes, Lovász complexes, and atom crosscut complexes*, Topology Appl. 153 (2006), no. 14, 2445-2454.

[119] Eric, Babson and Dmitry N. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Ann. of Math. (2) **165 (3)** (2007), 965-1007.

其它应用

代数拓扑在其它很多领域都有非常活跃的应用，例如Østvær将Quillen的模型范畴应用于算子代数，建立了C^*-代数的同伦论[120]；

有理同伦论应用于形变理论（deformation theory[121] [122] [123] [124]；

[120] Østvær, Paul Arne, *Homotopy Theory of C^*-Algebras*, Frontiers in Mathematics, Birkhöuser Basel, Springer Basel AG, 2010, VI+140pp.

[121] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math., **79 (1)** (1964), 59 – 104.

[122] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras II*, Ann. of Math., **88** (1966), 1 – 19.

[123] Ezra Getzler, *Lie theory for nilpotent L-infinity algebras*, Ann. of Math. (2) **170 (1)** (2009), 271-301.

[124] Martin Markl, *Deformation Theory of Algebras and Their Diagrams*, Conference board of the Mathematical Sciences. Regional conference series in mathematics **116**, American Mathematical Soc., 2012, 129pp.

组合代数拓扑应用于分布式计算[125]；

同伦论应用于机器人路径规划（robot motion planning）[126] [127] [128]。

---

[125]Maurice Herlihy, Dmitry Kozlov, Sergio Rajsbaum, *Distributed Computing Through Combinatorial Topology*, 1st Edition, Imprint: Morgan Kaufmann, eBook ISBN: 9780124047280.

[126]Farber, M., *Topological complexity of motion planning*, Discrete & Computational Geometry, **29 (2)** (2003), 211-221.

[127]M. Farber, *Instabilities of robot motion*, Topology Appl. **140 (2-3)** (2004), 245–266.

[128]M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, EMS 2008.